Aiguilles de Buffon et approximations de Pi

Shalom Eliahou

Université du Littoral Côte d'Opale

Semaine des Maths, 14 mars 2017

Introduction

But

Voir comment Pi apparaît, par surprise, dans un jeu de lancer d'aiguilles proposé par Buffon.

Au menu :

- Petit rappel sur Pi
- Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon
- Son jeu du lancer d'aiguilles
- Apparition surprise de Pi
- L'expérience de Lazzaroni en 1901
- Approximations rationnelles de Pi

Petit rappel sur Pi

Le nombre Pi, dénoté par la lettre grecque π, est défini comme étant la circonférence d'un cercle de diamètre 1.

π apparaît **partout** en mathématiques : géométrie, algèbre, analyse, théorie des nombres, probabilités, etc.

Développement décimal : $\pi = 3,1415\ 926\ 535\ 8979\ 3238\ 46264\ldots$

FIGURE: Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707–1788)

Quelques mots sur Buffon

- Intendant du Jardin des Plantes de 1739 à 1788
- Savant universel (mathématiques, sciences naturelles, etc.)
- Auteur d'une monumentale Histoire naturelle, générale et particulière en 36 volumes (1749–1788)
- Fondateur de la théorie géométrique des probabilités
- Site internet : `www.buffon.cnrs.fr`

De **pi**le-ou-face aux aiguilles

• Rappel sur **pi**le-ou-face : on lance une pièce de monnaie normale. Quelle est la probabilité qu'elle tombe sur **pile** ?

Réponse : 50%, c'est-à-dire $1/2$, c'est-à-dire $0,5$.

De façon équivalente : on lance 1000 pièces de monnaie, et on compte le nombre de celles qui tombent sur pile. On en trouvera environ 500.

• En 1733, Buffon a proposé le jeu analogue suivant :

- On lance une aiguille sur un parquet.
- Quelle est la probabilité qu'elle en croise une ligne ?

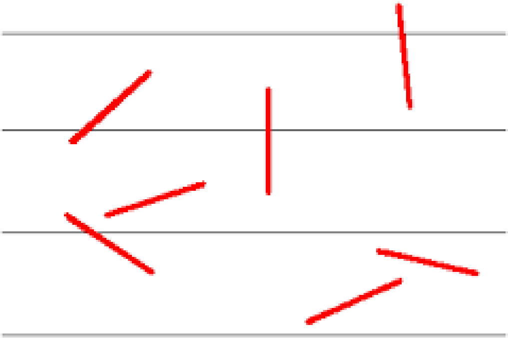

FIGURE: $N = 7$ aiguilles, $R = 4$ croisements

De façon équivalente, on lance N aiguilles sur un parquet, et on compte le nombre R de celles qui croisent une ligne. Combien vaudra R/N, en moyenne ?

Pour simplifier le modèle, **on suppose que :**

- toutes les aiguilles ont la même longueur, disons a
- toutes les lattes du parquet ont la même largeur, disons d
- a est plus petit que d.

Alors, une aiguille ne peut croiser qu'une ligne au maximum.

Questions

Quelle est la proportion des aiguilles qui croiseront une ligne du parquet ? Peut-on l'estimer ?

Apparition surprise de π !

Théorème (Buffon, 1733)

Comme ci-dessus, notons $a =$ la **longueur** de l'aiguille, $d =$ la **distance** entre deux lignes du parquet, et supposons $a \leq d$. Soit P la probabilité que l'aiguille **croise une ligne**. Alors

$$P \; = \; \frac{2}{\pi} \times \frac{a}{d} \; \sim \; 0{,}64 \times \frac{a}{d}.$$

Exemple

Supposons $a = 7{,}5$ cm et $d =$15 cm. Alors $\dfrac{a}{d} = \dfrac{1}{2}$. Donc dans ce cas :

$$P \; = \; \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{2} \; = \; \frac{1}{\pi} \; \sim \; 0{,}32.$$

FIGURE: Pierre Simon, Marquis de Laplace (1749–1827)

L'idée de Laplace

Son idée en 1812 : utilisons le jeu des aiguilles de Buffon pour obtenir de bonnes approximations de π !

Rappelons-nous la formule de Buffon, lorsque $\frac{a}{d} = \frac{1}{2}$ par exemple :

$$P = \frac{1}{\pi} \sim 0,32.$$

Expérimentalement, on peut mesurer cette probabilité P ainsi :

- faire N tirages d'aiguilles, avec N très grand ;
- compter le nombre R de croisements observés.

Alors en général, on aura $\frac{1}{\pi} = P \sim \frac{R}{N}$. Donc $\pi \sim \frac{N}{R}$.

Le miracle de Lazzarini ?

Le mathématicien Mario Lazzarini prend Laplace au mot en 1901.

- Longueur d'aiguille choisie : $a = 2,5$ cm.

- Distance entre lignes voisines de son parquet : $d = 3$ cm.

$$\text{Ce qui donne :} \quad \frac{a}{d} = \frac{5}{6}.$$

- Il lance $N = 3048$ fois l'aiguille, et observe $R = 1808$ croisements.

- En appliquant la formule de Buffon $\pi \sim P = \frac{5}{3} \times \frac{N}{R}$, on obtient

$$\pi \sim \frac{5}{3} \times \frac{3048}{1808} = \frac{355}{113}.$$

Or

$$\frac{355}{113} = 3{,}14159292035\ldots,$$

une approximation extraordinaire de $\pi = 3{,}14159265358979\ldots$
avec 6 décimales justes !

Quelle chance :-)

En fait, cette fabuleuse fraction $\frac{355}{113}$ était connue depuis fort longtemps, découverte par Zu Chongzhi au 6ème siècle !

π est irrationnel !

Cela signifie que π **n'est pas** un nombre rationnel :

$$\pi \neq \frac{a}{b}$$

si a et b sont des nombres entiers (démontré par Lambert en 1761).
Impossible donc d'approcher π exactement par une fraction.

Bien plus, π est un nombre transcendant (démontré par Lindemann en 1882).

Cela entraîne l'insolubilité de la quadrature du cercle.

Approximations de π

Cette fraction $\frac{355}{113}$ approchant si bien π est extraordinaire ! Peut-on en trouver d'autres aussi performantes ?

Tout dépend du dénominateur admis. Malgré un dénominateur 113 plutôt petit, la fraction $355/113$ approxime π avec 6 décimales justes.

Bien sûr, la fraction

$$\frac{3141592}{1000000} = 3,141592$$

approxime aussi π avec 6 décimales justes. Mais au prix fort, avec un gros dénominateur valant un million !

Et si on veut **9 décimales justes**, il suffit de mettre un milliard sur la table et prendre $3141592653/1000000000$; etc.

Or, l'exemple de $355/113$ montre qu'on peut faire aussi bien, mais de façon beaucoup plus économique au dénominateur !

Tout l'enjeu est là : une fois que l'on se fixe un budget, c'est-à-dire ici la **taille maximale** admise pour le dénominateur, comment trouver la meilleure approximation de π dans ce cadre budgétaire ?

• Par exemple, fixons le budget à 1. Quelle est, alors, la meilleure approximation de π dans ce cadre ? Facile, c'est

$$\frac{3}{1} = 3,$$

tout simplement !

• Et maintenant, si l'on fixe le budget à 10, quelle est la meilleure approximation de π dans ce cadre ?

On pourrait penser que c'est

$$\frac{31}{10} = 3,1.$$

Eh bien non ! En dépensant moins, on peut gagner plus ! Dépensons seulement 7, mais astucieusement. On trouve alors

$$\frac{22}{7} = 3,142857\dots,$$

avec deux décimales exactes de π, contre seulement une avec la fraction $31/10$.

Cette fraction $22/7$ tenait d'ailleurs lieu de valeur de π pour les Egyptiens de l'Antiquité.

• Et avec un budget de 100, quelle est la meilleure approximation de π qu'on puisse obtenir ?

• Et avec un budget de 1000 ? Et de 10000 ? Et de 100000 ?

FIGURE: John Wallis (Ashford 1616–Oxford 1703)

La méthode de John Wallis

John Wallis a décrit en 1685 une méthode générale pour obtenir les approximations les plus économiques possibles d'un nombre irrationnel. Voyons ce qu'elle donne appliquée à π :

$$\frac{3}{1} < \pi < \frac{4}{1}$$

$$\frac{3}{1} < \pi < \frac{3+4}{1+1} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{3}{1} < \pi < \frac{3+7}{1+2} = \frac{10}{3}$$

$$\frac{3}{1} < \pi < \frac{13}{4}$$

$$\frac{3}{1} < \pi < \frac{16}{5}$$

$$\frac{3}{1} < \pi < \frac{19}{6}$$

$$\frac{3}{1} < \pi < \frac{22}{7}$$

$$\frac{25}{8} < \pi < \frac{22}{7}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{25}{8} & < & \pi & < & \frac{22}{7} \\
\frac{47}{15} & < & \pi & < & \frac{22}{7} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\frac{333}{106} & < & \pi & < & \frac{22}{7} \\
\frac{333}{106} & < & \pi & < & \color{red}{\frac{355}{113}} \\
\frac{688}{219} & < & \pi & < & \frac{355}{113} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\frac{103993}{33102} & < & \pi & < & \frac{355}{113} \\
\frac{103993}{33102} & < & \pi & < & \color{red}{\frac{104348}{33215}}
\end{array}$$

Considérons la dernière fraction obtenue, soit $\frac{104348}{33215}$.

Son dénominateur 33215 n'a que 5 chiffres, mais pourtant elle approxime π avec 9 décimales justes :

$$\frac{104348}{33215} = 3,141592653921421\ldots$$

C'est bien plus économique qu'un milliard !

FIGURE: Christiaan Huygens (1629–1695)

Le planétarium de Huygens

Cette question des meilleures approximations rationnelles a aussi des applications très concrètes !

Par exemple, Huygens les a utilisées en 1682 pour concevoir son planétarium.

Les fractions obtenues permettaient de compter le bon nombre de dents pour les roues dentées de ses engrenages.

Exemple. Si une roue à 3 dents touche une roue à 5 dents, alors quand la première roue **fait 5 tours**, la seconde **n'en fait que 3**. Cela arrive tous les 15 crans.

On peut réaliser ainsi un rapport de vitesses de rotation de $\frac{3}{5}$.

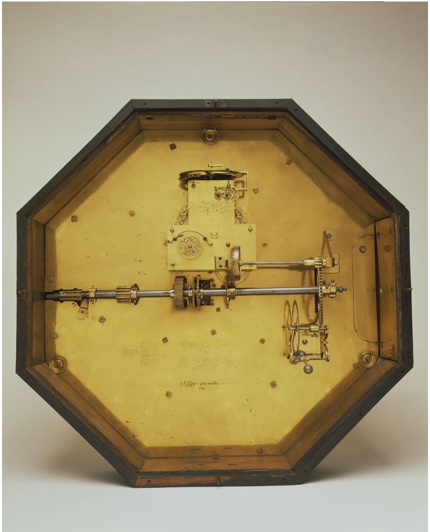

FIGURE: Le planétarium de Huygens

Epilogue

Les meilleures approximations rationnelles de π déterminent le **nombre minimal** de lancers d'aiguilles dans le jeu de Buffon pour approximer π avec une précision donnée.

Ainsi, si l'on lance 1000 fois une aiguille sur le plateau du PLUS, on n'arrivera jamais à obtenir plus de **6 décimales justes** de π. Impossible de battre 355/113 avec 1000 lancers ou moins.

Si l'on veut atteindre 7 décimales justes, il faut lancer l'aiguille $N = 86.953$ fois et espérer observer $R = 27.678$ croisements exactement. On aura alors

$$\frac{86.953}{27.678} = 3,14159260062\ldots$$

Merci pour votre attention !