Post doctorat ULCO 2021
Des Graphes aux Tresses : les groupes d'Artin (GTA)

Laboratoire d'accueil ULCO : Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville.
Encadrants ULCO : Jean Fromentin et Pierre-Louis Giscard.

1 Projet scientifique

Contexte combinatoire

Les *groupes d'Artin à angle droit*, aussi nommés *groupes partiellement commutatifs*, sont des groupes mathématiques admettant une présentation par générateurs et relations très simple, les seules relations étant des relations de commutation entre quelques paires de générateurs. Pour clarifier cette notion, considérons un exemple simple sur trois générateurs x_1, x_2 et x_3, tels que $x_1x_2 = x_2x_1$ et $x_1x_3 = x_3x_1$ mais $x_2x_3 \neq x_3x_2$. On note le groupe d'Artin à angle droit

$$\mathscr{A} := \left\langle x_1, x_2, x_3 \,\middle|\, \begin{array}{l} x_1x_2 = x_2x_1 \\ x_1x_3 = x_3x_1 \end{array} \right\rangle, \tag{1}$$

et le monoïde d'Artin (ou de traces) correspondant $\mathscr{A}^+$.

De tels monoïdes ont trouvé une importance toute particulière en informatique théorique [4] puis, avec la théorie des empilements de pièces [1, 11, 13], en combinatoire et à travers d'autres branches des mathématiques. En particulier, H.-N. Liu, C. Wrathall et K. Zeger [12] ont montré, grâce à cette théorie, que le *problème du mot* pour les groupes d'Artin à angle droit est soluble en temps linéaire. Un cas particulièrement important de cette théorie est fourni par les empilements de cycles sur les graphes, appelés *randonnées*, et que l'on peut aussi percevoir comme des ensembles de chemins (disjoints ou non). De manière remarquable, les randonnées réalisent une extension semi-commutative naturelle de la théorie des nombres [5], offrant ainsi de nouveaux champs d'applications [6, 7, 8, 9, 10] à une pléthore d'outils mathématiques issus de siècles de recherches sur le sujet.

De la “dessinabilité” d'un graphe

Les monoïdes d'Artin à angle droit $\mathscr{A}^+$ sont donc la généralisation la plus immédiate possible des randonnées et empilements. Il semble possible d'étendre l'énorme richesse combinatoire connue dans le cadre à peine plus restreint des empilements au monoïde lui-même. Citons un exemple précis de ce processus concernant la fonction de Möbius μ des monoïdes des traces, essentielle à la résolution de problèmes de dénombrement via le principle d'inclusion-exclusion. Pour un monoïde d'Artin à angle droit $\mathscr{A}^+$

la fonction de Möbius μ n'est pas facile à calculer concrètement : il faudrait notamment que les relations de commutation soient transitives (c'est à dire $x_1x_2 = x_2x_1$ et $x_1x_3 = x_3x_1$ impliqueraient $x_2x_3 = x_3x_2$) pour que μ prenne la forme d'un simple determinant de matrice [3, 2]. De manière surprenante, cet obstacle peut être totalement contourné à l'aide des randonnées et une forme déterminantale de μ existe hors transitivité, à condition que $\mathscr{A}^+$ soit représentable comme un monoïde $\mathscr{R}$ de randonnées [5]. Cette dernière condition est bien moins restrictive, par exemple le monoïde $\mathscr{A}^+$ de l'exemple (1) est réalisé par les randonnées d'un graphe en dépit de l'absence de transitivité des relations de commutation, voir Figure 1. Se pose ainsi la question de déterminer quand une telle représentation existe ? Or cette question est *beaucoup plus subtile* qu'il n'y paraît. D'abord, on trouve rapidement des monoïdes des traces $\mathscr{A}^+$ tels qu'il n'existe aucun graphe dont le monoïde des randonnées réalise exactement $\mathscr{A}^+$ et pourtant il existe une infinité de graphes dont les randonnées réalisent des monoïdes $\mathscr{A}^{+\prime}$ plus larges que $\mathscr{A}^+$, $\mathscr{A}^+ \subsetneq \mathscr{A}^{+\prime}$. Deuxièmement, on montre aisément qu'un monoïde des randonnées est nécessairement un monoïde d'Artin à angle droit.

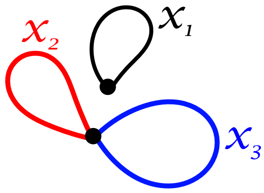

Figure 1: Un graphe dont le monoïde des randonnées réalise $\mathscr{A}^+$.

Combinant ces deux observations on est forcé de conclure qu'il existe des monoïdes des randonnées $\mathscr{R}$, et donc de chemins sur les graphes, qui ne sont dessinables par aucun graphe exactement : soit le graphe a des chemins en plus, soit il lui en manque, et ce bien qu'algébriquement $\mathscr{R}$ soit clos. Cette analyse rapide montre que la distance (ténue) qui sépare les monoïdes d'Artin à angle droit et les monoïdes des randonnées est celle de la "dessinabilité" d'un graphe, et qu'elle détermine notamment la forme de la fonction de Möbius de $\mathscr{A}^+$. C'est précisément ce genre de contraintes sur les graphes, loin d'êtres évidentes à première vue, qui sont à l'origine de nombreux résultats et conjectures hautement non triviales en théorie des graphes portant par exemple sur la colorabilité de ceux-ci ou l'existence de couvertures de graphes par des cycles.

L'injection des randonnées dans les monoïdes d'Artin à angle droit

Soit G un graphe orienté quelconque. On lui associe un *monoïde des randonnées* $\mathscr{R}(G)$, défini ainsi : ses générateurs sont les cycles simples dans G, et comme relations, on impose que deux générateurs commutent si les cycles correspondants sont disjoints. Par construction même, le monoïde $\mathscr{R}(G)$ est un monoïde d'Artin à angles droits. Il est donc possible d'étudier le monoïde des randonnés $\mathscr{R}(G)$ d'un graphe fini G à l'aide du monoïde d'Artin à angle droit associé.

A cette fin, on procède en construisant un graphe dual de G, noté ici $\Gamma(G)$ tel que chaque cycle simple de G est un noeud de $\Gamma(G)$ et deux tels noeuds partagent une arête dès lors que les cycles simples correspondants sont disjoints sur G. On s'attachera à caractériser les propriétés de graphes $\Gamma(G)$ ainsi construits parmi tous les graphes non-orientés simples et sans boucle. En corollaire, nous étudierons les monoïdes d'Artin à angles droits correspondant, obtenus en associant à chaque noeud de $\Gamma(G)$ un générateur de $\mathscr{A}^+$ et une relation de commutation pour chaque arête. Nous aborderons ceci par une exploration informatique, le but étant de passer automatiquement et rapidement d'un graphe G au graphe $\Gamma(G)$ puis au monoïde d'Artin correspondant que l'on analysera.

De manière réciproque, nous considèrerons un monoïde d'Artin à angle droit $\mathscr{A}^+$ et déterminerons, via les relations qu'il décrit entre les randonnées le réalisant, l'existence ou non de cycles simples supplémentaires. Si aucun n'existe $\mathscr{A}^+ = \mathscr{R}$ est donc un monoïde des randonnées, et le graphe le réalisant est déterminé à un isomorphisme près par $\mathscr{A}^+$ [5]. Dans le cas contraire, on doit soit ôter des générateurs soit en ajouter et on construira alors un encadrement explicite entre deux monoïdes des randonnées $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ tels que $\mathscr{R}_1 \subsetneq \mathscr{A}^+ \subsetneq \mathscr{R}_2$. Cette approche offrira un début solide permettant de discerner les conditions nécessaires à la dessinabilité de G, et sa réciproque, la réalisation de $\mathscr{A}^+$ par un graphe. Finalement, nous pourrons aussi définir une extension de la théorie des nombres sur les monoïdes d'Artin à angle droit ou encore généraliser la notion de monoïde des randonnées.

2 Organisation et aspects administratifs

Insertion et dynamique au sein du laboratoire

Le sujet de recherche proposé pour ce postdoc est à la croisée immédiate des thématiques de recherche de Jean Fromentin (MCF) et Pierre-Louis Giscard (MCF), dépositaires de deux projets ANR sur des sujets connexes. En outre, des questions relatives à la théorie des nombres et aux structures algébriques permettent des interactions naturelles avec Bruno Martin (MCF HDR) et Loïc Foissy (Professeur) au sein de l'équipe algèbre du LMPA. Le post-doctorant participera donc activement à entretenir la dynamique collaborative du laboratoire ainsi que son activité scientifique soutenue, remarquée notamment par les assesseurs HCERES.

Programme et échéancier de travail

Etant donné le contexte actuel de l'emploi scientifique académique il nous semble essentiel d'envisager ce projet comme un tremplin et une aide pour le post-doctorant vers sa future carrière. Pour cette raison, la production de publications constitue un objectif important à l'impact singulier. En conséquence, nous avons identifié des pistes de réflexions déjà mûres pouvant conduire rapidement à des résultats publiables. Pour les mêmes raisons, le candidat retenu devra avoir une connaissance préalable dans au moins un des domaines suivants: empilements de pièces, groupes d'Artin, théorie des graphes et conception d'algorithmes combinatoires.

Ceci conduit à l'échéancier de travail suivant :

(a) Mois I–III : introduction précise au sujet, exploration pratique de la dessinabilité et de sa réciproque;

(b) Mois IV–VIII : étude théorique incluant la détermination des fonctions de Möbius de monoïdes d'Artin à angle droit;

(b) Mois VIII–XII : extension des outils combinatoires sur les randonnées aux monoïdes d'Artin à angle droit.

3 Bibliographie

[1] P. Cartier and D. Foata. *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements*, volume 85 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1969.

[2] C. Choffrut and M. Goldwurm. Determinants and Möbius functions in trace monoids. *Discrete Mathematics*, 194(1):239 – 247, 1999.

[3] V. Diekert. Transitive Orientations, Möbius Functions, and Complete Semi-Thue Systems for Free Partially Commutative Monoids. In Timo Lepistö and Arto Salomaa, editors, *Automata, Languages and Programming*, Lecture Notes in Computer Science, pages 176–187. Springer Berlin Heidelberg, 1988.

[4] V. Diekert and G. Rozenberg. *The Book of Traces*. World Scientific, 1995.

[5] P.-L. Giscard and P. Rochet. Algebraic combinatorics on trace monoids: Extending number theory to walks on graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 31(2):1428–1453, 2017.

[6] P.-L. Giscard and P. Rochet. Enumerating simple paths from connected induced subgraphs. *Graphs and Combinatorics*, 34(6):1197–1202, Nov 2018.

[7] P.-L. Giscard, P. Rochet, and R. C. Wilson. Evaluating balance on social networks from their simple cycles. *Journal of Complex Networks*, 5(5):750–775, 2017.

[8] P.-L. Giscard, P. Rochet, and R. C. Wilson. A Hopf algebra for counting cycles. *Discrete Mathematics*, 341(5):1439 – 1448, 2018.

[9] P.-L. Giscard and R. C. Wilson. A centrality measure for cycles and subgraphs ii. *Applied Network Science*, 3(1):9, Jun 2018.

[10] P.-L. Giscard and R. C. Wilson. Cycle-centrality in economic and biological networks. In C. Cherifi, H. Cherifi, M. Karsai, and M. Musolesi, editors, *Complex Networks & Their Applications VI*, pages 14–28, Cham, 2018. Springer International Publishing.

[11] C. Krattenthaler. The theory of heaps and the Cartier-Foata monoid, 2006. Complement to the electronic republication to Cartier's and Foata's *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements*.

[12] H.-N. Liu, C. Wrathall, and K. Zeger. Efficient solution of some problems in free partially commutative monoids. *Inform. and Comput.*, 89(2):180–198, 1990.

[13] G. X. Viennot. Heaps of pieces, i : Basic definitions and combinatorial lemmas. In G. Labelle and P. Leroux, editors, *Combinatoire énumérative*, pages 321–350, Berlin, Heidelberg, 1986. Springer Berlin Heidelberg.