

## Pseudo-aléa des chiffres des nombres premiers

**Cathy Swaenepoel**

*Université Paris Cité*

**Email** : [cathy.swaenepoel@imj-prg.fr](mailto:cathy.swaenepoel@imj-prg.fr)

### **Resumé :**

Les chiffres des nombres premiers sont-ils « aléatoires » ? Ont-ils des propriétés semblables à celles des chiffres de tous les entiers naturels ? Ces questions, non seulement intéressantes pour les nombres premiers mais aussi pour beaucoup d'autres suites, sont à l'origine de nombreux problèmes et travaux en théorie des nombres.

Dans cet exposé, nous nous concentrerons principalement sur les chiffres des nombres premiers qui ont suscité beaucoup d'intérêt ces dernières années. Nous explorerons leur pseudo-aléa au travers de quelques résultats (notamment de Mauduit–Rivat, Maynard, Bourgain et moi-même) donnant des estimations du nombre de nombres premiers dont les chiffres vérifient certaines propriétés.

## Sur la constante de Cheeger des graphes et surfaces hyperboliques

Nicolas Curien  
*Université Paris-Saclay*

**Email :** nicolas.curien@gmail.com

### Resumé :

Nous présenterons quelques résultats classiques sur la constant isopérimétrique des graphes  $d$ -réguliers et leur extension récente au cas des surfaces hyperboliques. Bien que les résultats sont « déterministes » les preuves, elles, sont probabilistes! Basé sur des travaux en commun avec Thomas Budzinski et Bram Petri.

## La quantification de la diffusion numérique et les schémas de transport anti-diffusifs, Sorbonne Université.

Nina Aguilon  
*LJLL, Sorbonne Université*

**Email :** [nina.aguilon@sorbonne-universite.fr](mailto:nina.aguilon@sorbonne-universite.fr)

### **Resumé :**

Dans cet exposé, j'expliquerai dans un premier temps comment j'ai commencé à travailler sur ce sujet dont je ne suis pas experte, pourquoi je pense que des personnes formées aux mathématiques peuvent et doivent y contribuer, et je présenterai quelques questions numériques importantes pour les simulations océaniques utilisées pour les projections du climat futur. Dans un second temps, je donnerai plus de détails sur deux sujets sur lesquels je travaille en ce moment : la quantification de la diffusion numérique et les schémas de transport antidiffusifs.

Mercredi 21 septembre

**Conférence plénière – 15h00**

- Cathy Swaenepoel, *Pseudo-aléa des chiffres des nombres premiers*
- 

**Session Arithmétique - Application – 16h30**

- Pierre-Louis Giscard, *Chemins sur les graphes : théorie et applications*
- Lucile Devin, *Biais de Tchebychev exceptionnels*
- Pierre-Yves Piriou, *Techniques de changement de variables pour l'optimisation de calcul numérique par réduction de la taille des types*

**Session Analyse numérique 1 – 16h30**

- Pierre Le Barbenchon, *Preuve numérique pour la stabilité de schéma différences finies en domaine borné d'espace*
- Clément Lasuen, *Un schéma préservant l'asymptotique pour le modèle  $M_1$  sur maillages coniques*
- El Mehdi Haress, *Strong-error approximation of SDEs with fractional noise and distributional drift.*
- Sheila Permanas, *Modeling and Imagery Approach of Spatiotemporal Development of Intra-host Pathogens with Growing Lesions*

**Session Modélisation Mathématique appliquée à la biologie – 16h30**

- Jessie Levillain, *Locomotion flagellaire de micro-organismes*
- Quentin Goepfert, *Speckle statistics in stochastic homogenization regime*
- Mohamed Abdi Abdoulrazack, *Analyse mathématique de la dynamique d'une épidémie sur un graphe : exemple du COVID-19 à Djibouti*
- Karen Burdeos, *The Expanded PRUNUS Model : Invasion Dynamics Modeling of Tree Populations under Macro-climatic Conditions*

## Chemins sur les graphes: théorie et applications

**P.-L. Giscard**

*Université du Littoral Côte d'Opale*

**Email** : giscard@univ-littoral.fr

**Mots Clés** : chemins sur les graphes

**Biographie** – Thèse Univ. Oxford 2014, postdoctorat Univ. Oxford 2014-2015, Research Fellow of the Royal Commission for the Exhibition of 1851, 2015-2018, Maître de conférences à l'ULCO depuis 2018

### Resumé :

Nous présentons une application de la théorie des chemins sur les graphes dans la résolution de systèmes d'équations différentielles couplées non-linéaires à coefficients non-constants. Pour cela, nous décrirons la structure (bi)algébrique satisfaite par l'ensemble des chemins sur les graphes réalisant une structure premièrement décrite par Livernet [5] mais dont aucun exemple n'était connu jusqu'à présent. Puis nous montrerons comment quotienter cette structure pour obtenir une extension de la théorie des nombres satisfaite par les chemins. Armés de ces deux observations, nous pourrions montrer que tout système d'équations différentielles ordinaires couplées admet au moins une solution exprimable en fraction continues finies sur les chemins [4, 2]. Ce dernier résultat a trouvé de nombreuses applications de la physique quantique [1] à l'astro-physique [3] en passant par l'analyse des réseaux.

### Références

- [1] P.-L. Giscard and C. Bonhomme. Dynamics of quantum systems driven by time-varying hamiltonians : Solution for the bloch-siegert hamiltonian and applications to nmr. *Physical Review Research*, 2 :023081, 2020.
- [2] P.-L. Giscard, K. Lui, S. J. Thwaite, and Jaksch D. An exact formulation of the time-ordered exponential using path-sums. *Journal of Mathematical Physics*, 56(5) :053503, 2015.
- [3] P.-L. Giscard and A. Tamar. Elementary integral series for heun functions. with an application to black-hole perturbation theory. *Journal of Mathematical Physics*, 63(6) :063501, 2022.
- [4] Y. N. Kosovtsov. Formal exact operator solutions to nonlinear differential equations. *arXiv*, 0910.3923, 2009.
- [5] M. Livernet. A rigidity theorem for pre-lie algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 207 :1–18, 2006.

## Biais de Tchebychev exceptionnels

**Lucile Devin**

*Université du Littoral Côte d'Opale*

**Email :** lucile.devin@univ-littoral.fr

### **Resumé :**

Tchebyshev a observé que lorsque l'on énumère les nombres premiers par ordre croissant, on a souvent l'impression d'en croiser plus qui soient congrus à 3 qu'à 1 modulo 4. Cette observation est maintenant bien comprise et expliquée, notamment par les travaux de Rubinstein et Sarnak. On étudie un analogue dans l'anneau des polynômes à coefficients dans un corps fini. Dans ce cadre, on prouve aussi un biais dans la répartition de type Tchebyshev « dans la plupart des cas ». Mais on observe aussi, quelques cas exceptionnels où il se passe le contraire de ce qui est attendu.

# Techniques de changement de variables pour l'optimisation de calcul numérique par réduction de la taille des types

Mathieu GRIMAL, PIERRE-YVES PIRIOU

*Dpt. GM, INSA Rouen, Dpt. PRISME, EDF Lab, Chatou, France*

**Email :** mathieu.grimal1@insa-rouen.fr

**Mots Clés :** WLO (Word-Length Optimization), systèmes embarqués, arithmétique, calcul numérique, FPGA

**Biographie** – Après un Baccalauréat Scientifique Sciences de l'ingénieur, j'ai intégré l'INSA Rouen Normandie. J'ai alors fait deux années de cycle préparatoire intégré puis trois années de cycle ingénieur dans le département Génie Mathématique. Ce travail a été réalisé dans le cadre de mon stage de fin d'études à EDF R&D de Chatou.

## Resumé :

Afin de réduire la consommation énergétique et matérielle des systèmes numériques (en particulier embarqués) dans une optique de développement durable, une approche prometteuse est de développer des composants matériels de calcul sur-mesure [4]. Les FPGAs (Field Programmable Gate Arrays) sont de bons candidats pour développer de tels composants. Entre autres avantages, ce type de système n'impose aucune contrainte sur le format des types numériques, à la différence des processeurs et co-processeurs programmables dont les instructions élémentaires s'exécutent sur des mots de taille fixe (classiquement 32 ou 64 bits). Ainsi, les calculs peuvent être implémentés en utilisant des types et opérateurs numériques taillés au juste nécessaire pour atteindre les requis fonctionnels (amplitude et précision des variables) [1]. Cette approche est notamment explorée et outillée dans [2].

Dans ce résumé de travail de Master, nous nous sommes intéressés à une technique, reposant sur des changements de variables, pour réduire la taille des types numériques d'un calcul. L'intuition de base qui a guidée cette approche est que les types numériques usuels (entier, nombres à virgule fixe ou flottante, signés ou non signés) sont inefficaces pour représenter les variables dont les domaines de définition sont éloignés de 0. Par exemple, si on souhaite représenter une variable entière définie entre 121 et 128, on va l'encoder sur 8 bits (entier non signé) alors que seulement 8 valeurs sont utiles sur les 256 représentées. La question que l'on se pose est alors de savoir s'il est intéressant de changer de variable dans le calcul pour en utiliser une qui serait définie entre 0 et 7 et donc représentable avec 3 bits seulement.

Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes concentrés en particulier sur l'implémentation d'une comparaison du résultat d'un calcul arithmétique à un seuil (qui trouvera de nombreuses applications dans l'industrie notamment) :

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq S \tag{1}$$

Les  $X_i \in \mathbb{R}^+$  sont des entrées dont on connaît les intervalles de définition  $[X_i, \overline{X}_i]$  et qui ont une certaine résolution  $p_i$  (ces entrées peuvent par exemple correspondre à des valeurs mesurées par un capteur) et  $S \in \mathbb{R}$  est un certain seuil à ne pas dépasser.

Nous nous sommes par ailleurs inspirés de l'arithmétique affine dans laquelle on représente des nombres par des déviations partielles autour d'une valeur centrale, paramétrées par des symboles de bruit [3] :

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i \quad \text{avec } \varepsilon_i = [-1, 1] \quad (2)$$

où  $x_0 \in \mathbb{R}$  est la valeur centrale, les  $x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$  sont les déviations partielles et les  $\varepsilon_i$  sont les symboles de bruits.

Ainsi, en remplaçant les  $X_i$  dans l'équation 1 par leur intervalle convertie en arithmétique affine, on peut reformuler une nouvelle contrainte équivalente à la première (avec un nouveau seuil) mais portant sur les symboles de bruits  $\varepsilon_i$  plutôt que sur les  $X_i$  ce qui nous permet de représenter des nombres entre  $-1$  et  $1$  ce qui demandera généralement moins de bits.

La limite de cette représentation est que ce changement de variable va introduire une petite erreur numérique, que l'on ne pourra maîtriser qu'en consommant des bits de précision, ce qui risque de ne pas améliorer (voire d'empirer) la situation. On va donc chercher à s'inspirer de cette méthode, mais en se limitant à des changements de variables n'introduisant pas d'erreur numérique.

Une première idée est d'opérer un simple décalage des variables vers 0 :

$$X = \underline{X}_i + \varepsilon'_i \quad \text{avec } \varepsilon'_i = [0, \overline{X}_i - \underline{X}_i] \quad (3)$$

Cette méthode fonctionne efficacement lorsque la fonction  $f$  est linéaire, c'est à dire qu'elle n'est composée que d'additions, de soustractions et de multiplications par des constantes. On peut même calculer le nombre de bits économisés :

$$\sum_{i=1}^n \left( \left\lfloor \log_2 \left( \frac{\overline{X}_i}{p_i} \right) \right\rfloor - \left\lfloor \log_2 \left( \frac{\overline{X}_i - \underline{X}_i}{p_i} \right) \right\rfloor \right) \quad (4)$$

Dans le cas non-linéaire, l'astuce est de décaler les variables d'une puissance de 2 puis de diviser toute l'opération par cette puissance de 2, ce qui revient à un simple décalage de bits. Cette méthode n'est pas détaillée ici par manque de place, mais nous veillerons à en montrer l'intérêt lors de la présentation.

Nous avons montré comment de simples changements de variables dans les algorithmes de calculs numériques pouvaient permettre d'optimiser le dimensionnement des architectures de calcul numérique et donc la consommation énergétique et matérielle des systèmes numériques reposant sur des composants matériels dédiés à leur implémentation (tels que les FPGAs). Bien entendu ce travail n'est pas encore abouti et ouvre plusieurs perspectives. Pour consolider ces résultats, il faudrait dans un premier temps chercher dans quelle mesure et de quelle manière la fonction  $f$  peut être généralisée. Par ailleurs, d'autres applications que des fonctions de seuillage telle que formulées dans l'équation 1 pourraient être analysées. Enfin, on pourra persévérer sur l'application plus directe de l'arithmétique affine (comme initialement envisagé) en portant une attention particulière à la maîtrise des erreurs numériques.

## Références

- [1] George Constantinides, Peter YK Cheung, and Wayne Luk. *Synthesis and optimization of DSP algorithms*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [2] Florent De Dinechin and Bogdan Pasca. Designing custom arithmetic data paths with flopoco. *IEEE Design & Test of Computers*, 28(4) :18–27, 2011.
- [3] Jorge Stol and Luiz Henrique De Figueiredo. Self-validated numerical methods and applications. In *Monograph for 21st Brazilian Mathematics Colloquium, IMPA, Rio de Janeiro. Citeseer*, volume 5. Citeseer, 1997.
- [4] Michael B Taylor. Is dark silicon useful? harnessing the four horsemen of the coming dark silicon apocalypse. In *DAC Design Automation Conference 2012*, pages 1131–1136. IEEE, 2012.

# Preuve numérique pour la stabilité de schéma différences finies en domaine borné d'espace

Pierre Le Barbenchon, BENJAMIN BOUTIN ET NICOLAS SEGUIN  
*Université de Rennes 1,*

**Email :** pierre.le-barbenchon@univ-rennes1.fr

**Mots Clés :** Stabilité GKS, Condition de bord Lax-Wendroff Inverse, Modes d'instabilité, Matrices Quasi-Toeplitz, Déterminant de Kreiss–Lopatinskii, Étude numérique.

**Biographie** – Après avoir effectué ma scolarité à l'ENS de Rennes entre 2016 et 2020, je suis actuellement en deuxième année de thèse en analyse numérique au laboratoire de l'Irmar (labex Centre Henri Lebesgue) à l'Université de Rennes 1.

## Resumé :

Le but de cet exposé est d'étudier les schémas numériques d'ordres élevés en domaine borné d'espace et notamment les aspects de stabilité. On s'intéressera particulièrement aux schémas différences finies explicites à un pas en temps approchant les solutions de l'équation de transport en dimension 1.

Les conditions de bord considérées sont du type Lax-Wendroff Inverse (voir article [4]) ou des conditions hybrides qui mêlent aussi une extrapolation d'un nombre fixe de mailles intérieures. Ces deux méthodes permettent de fixer la consistance en entrée à un certain ordre, le but étant d'étudier la stabilité du schéma.

La théorie GKS introduite dans l'article [3] est un outil puissant pour étudier la stabilité des problèmes en domaine spatial borné. En effet, cet article donne une condition nécessaire et suffisante pour que le problème en domaine semi-borné (borné d'un seul côté) soit stable, notamment à travers l'étude du *déterminant de Kreiss–Lopatinskii* et des *valeurs propres généralisées*. Cette théorie détermine une condition suffisante pour que le problème en domaine entièrement borné (borné des deux cotés) puisse être traité en connaissant la stabilité avec chacun des bords. On donne plusieurs exemples qui illustrent les difficultés en présence de valeurs propres généralisées.

L'étude numérique de stabilité est possible au travers de différentes approches (matrice Quasi-Toeplitz [1] d'amplification, opérateur sur  $\ell^2(\mathbb{N}), \dots$ ). L'approche retenue s'appuie sur le calcul du déterminant de Kreiss-Lopatinskii. Un calcul d'indice complexe, s'appuyant sur ses propriétés d'holomorphicité [2], permet de dénombrer les modes d'instabilités de bord du schéma.

## Références

- [1] Richard M. Beam and Robert F. Warming. The asymptotic spectra of banded Toeplitz and quasi-toeplitz matrices. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 14(4) :971–1006, 1993.
- [2] Jean-François Coulombel. Stability of Finite Difference Schemes for Hyperbolic Initial Boundary Value Problems. *Lectures Notes*, 2011.
- [3] Bertil Gustafsson, Heinz-Otto Kreiss, and Arne Sundström. Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems. II. *Mathematics of Computation*, 26(119) :649–649, sep 1972.
- [4] François Vilar and Chi-Wang Shu. Development and stability analysis of the Inverse Lax Wendroff boundary treatment for central compact schemes. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 49(1) :39–67, January 2015.

## Un schéma préservant l'asymptotique pour le modèle $M_1$ sur maillages coniques

Clément Lasuen,  
CEA DIF,

**Email** : clement.lasuen@cea.fr

**Mots Clés** : Transfert radiatif, modèle aux moments, maillages courbes, volumes finis, schémas asymptotic preserving

### Biographie –

J'effectue ma thèse au CEA-DAM avec Philippe Hoch et Xavier Blanc (LJLL). J'étudie l'apport des maillages courbes pour la simulation 2D de phénomènes physiques intervenant dans les expériences de fusion par confinement inertiel. En particulier, mes travaux se concentrent sur l'équation de transfert radiatif et sa limite de diffusion.

### Resumé :

Ce travail porte sur l'étude d'un schéma numérique 2D pour le modèle  $M_1$  (1) sur maillage conique. Ce modèle s'écrit :

$$\partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{F} = 0, \quad \partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} P = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \mathbf{F}, \quad (1)$$

où  $\varepsilon$  est un coefficient positif,  $\sigma > 0$  est l'opacité et est supposée constante. La variable spatiale est  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . Les inconnues du système (1) sont l'énergie radiative  $E(t, \mathbf{x})$  et le flux radiatif  $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2$ . Le tenseur de pression  $P(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  dépend de  $E$  et  $\mathbf{F}$ . Ce modèle approxime les premiers moments de l'équation de transfert radiatif à l'aide d'une relation de fermeture entropique. La résolution numérique de ce type de modèles est une brique de base pour la simulation de réactions de fusion par confinement inertiel (FCI). De plus, lorsque le paramètre  $\varepsilon$  tend vers 0, le flux  $\mathbf{F}$  tend vers  $\mathbf{0}$  et l'énergie  $E$  tend vers la solution d'une équation de diffusion. Du point de vue des applications, il est important pour un schéma numérique discrétisant le modèle  $M_1$  d'être consistant avec cette limite. Ce type de schéma est dit *préservant l'asymptotique* (ou *asymptotic preserving* ou *AP* en anglais). Un tel schéma existe déjà pour des maillages polygonaux [3] et le travail que nous exposons ici consiste à l'adapter à des maillages coniques. Ce terme désigne un maillage 2D où les arêtes sont des courbes de Bézier rationnelles quadratiques  $\{\mathbf{x}^\omega(q), q \in [0, 1]\}$  avec :

$$\mathbf{x}^\omega(q) = \frac{(1-q)^2 \mathbf{x}_0 + 2\omega q(1-q) \mathbf{x}_1 + q^2 \mathbf{x}_2}{(1-q)^2 + 2\omega q(1-q) + q^2}. \quad (2)$$

où  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^\omega(0)$  et  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}^\omega(1)$  sont les sommets de l'arête,  $\mathbf{x}_1$  est un point de contrôle et  $\omega \geq 0$  est un poids scalaire (voir Figure 1).

Après avoir détaillé les propriétés de ce type de maillage, nous montrons comment le système (1) peut être reformulé comme un système de la dynamique des gaz. En suivant les idées développées dans [3] et [1], nous présentons la construction du schéma sur maillage conique. Nous adaptons également le travail [4] et détaillons une méthode de reconstruction à l'ordre 2 en espace. De plus, nous donnons une preuve rigoureuse du caractère *AP* du schéma et obtenons un critère *CFL* garantissant que la solution numérique reste bien dans le domaine des solutions admissibles. Enfin, nous constatons numériquement que le schéma limite, obtenu en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, est bien consistant avec l'équation de diffusion. Notons également que le critère *CFL* associé au schéma limite n'est pas trop restrictif et garantit la positivité de la solution.

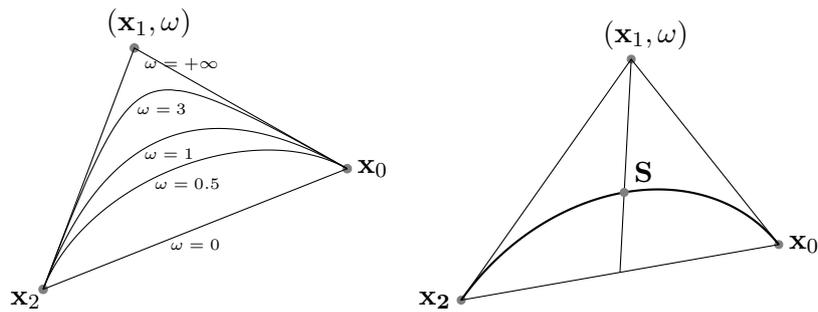


FIGURE 1 – Courbe de Bézier rationnelle quadratique.

## Références

- [1] Xavier Blanc, Vincent Delmas, and Philippe Hoch. Asymptotic preserving schemes on conical unstructured 2d meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 93(8) :2763–2802, 2021.
- [2] Xavier Blanc, Philippe Hoch, and Clément Lasuen. An asymptotic preserving scheme for the M1 model on conical meshes.
- [3] Emmanuel Franck. *Construction et analyse numérique de schéma asymptotic preserving sur maillages non structurés. Application au transport linéaire et aux systèmes de Friedrichs*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2012.
- [4] Philippe Hoch and Emmanuel Labourasse. A frame invariant and maximum principle enforcing second-order extension for cell-centered ALE schemes based on local convex hull preservation. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 76(12) :1043–1063, 2014.

## Strong-error approximation of SDEs with fractional noise and distributional drift

E. Haress, L. GOUDENÈGE, A. RIHARD  
*Université de Paris-Saclay - Centralesupelec,*

**Email** : el-mehdi.haress@centralesupelec.fr

**Mots Clés** : Schémas numériques, Equations différentielles stochastiques, Régularisation par le bruit...

**Biographie** – Je suis diplômé de l'école Centralesupelec. Je suis actuellement en première année de thèse au sein du laboratoire MICS de l'école, sous la direction de Ludovic Goudenège et Alexandre Richard. Je bénéficie d'une allocation doctorale du LMH. J'étudie des schémas numériques dans le but d'approximer des solutions d'équations différentielles stochastiques avec une fonction de dérive irrégulière. Ce type d'équations est présent dans plusieurs phénomènes dérivant une sorte d'irrégularité. Par exemple dans les problèmes de changement de phase en physique et dans l'évolution des taux d'intérêts en finance. En parallèle, je suis aussi chargé de TD pour les cours "Convergence, Intégration et Probabilité" et "Equations aux dérivées partielles" de Centralesupelec.

### Resumé :

The recent papers [1, 2] rely on regularisation by noise techniques to introduce a notion of solution to one-dimensional SDEs and SPDEs when the drift is a distribution. They show that as long as the drift satisfies some mild regularity assumptions (which allow for some distributions), the solution exists and is unique. This begs two questions

*Can we generalise those results to any dimension ?*

*Can we approximate these solutions numerically ?*

For SDEs, we argue that the answer is yes. We shall see that simple numerical schemes allow us to approximate the solutions with satisfying rates of convergence.

The question of the rate of convergence for SDEs is well-studied in the literature [3, 7, 8, 10, 13, 16, 17, 18, 19]. Numerical analysis of SDEs driven by a Brownian motion goes back at least to the works of Kloeden and Platen, Talay and Tubaro ([8, 15, 18] to cite a few), who were among the first to study a Euler-Maruyama scheme. For SDEs with globally Lipschitz functions, a rate of convergence is  $h^{1/2}$  was proven if  $h$  is the mesh-size of the time discretisation. Other types of SDEs studied in the literature often include SDEs driven by a fractional Brownian motion (also called fractional SDEs). With Lipschitz coefficients, Nourdin was among the first authors to study such equations [14]. A rate of convergence  $h^H$  for the Euler-Maruyama scheme was proven, where  $H$  is the Hurst parameter of the fBm. The optimality of this rate was studied for example in [11, 12]. Throughout time, many were interested in studying SDEs with irregular coefficients, Szölgényi [16] takes interest in summarizing the relevant works on this matter for SDEs driven by a Brownian motion for example. While it is still early to say that we have a full understanding of SDEs, a piecemeal account is emerging. But It is important to point out that existence and uniqueness results still don't match with up the numerical approximation results. Recently, a rate  $h^{(\frac{1}{2}+\alpha H)\wedge 1}$  was obtained and proven to be optimal for fractional SDEs with drifts that are in  $C^\alpha$  for  $\alpha \in [0, 1]$ . The question however was, to our best knowledge, never asked for coefficients that may be distributions. Pushing this interest to the extreme, we consider additive SDEs and obtain

a rate of convergence for distributional drifts. The proof relies essentially on stochastic sewing techniques, developed by Lê in [9], which help us close the gap mentioned above.

Let  $d \geq 1$  and consider the following  $d$ -dimensional SDE on the time interval  $[0, 1]$

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + B_t, \quad (0.1)$$

where  $X_0 \in \mathbb{R}^d$ ,  $b$  is a distributional drift in some non-homogeneous Besov space  $\mathcal{B}_p^\gamma(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  and  $B$  is an  $\mathbb{R}^d$ -fractional Brownian motion with Hurst parameter  $H$ .

Thanks to Theorem 2.8 in [1], when  $d = 1$ , under the assumption

$$1 - \frac{1}{2H} < \gamma - \frac{d}{p} < 0, \quad (0.2)$$

we know that there exists a weak solution  $X$  to (0.1) that has the following regularity for all  $m \geq 2$

$$[X - B]_{\mathcal{C}^{\frac{1}{2}+H} L^m} := \sup_{\substack{s, t \in [0, 1] \\ s < t}} \frac{\|X_t - B_t - X_s + B_s\|_{L^m}}{|t - s|^{\frac{1}{2}+H}} < \infty.$$

First, we check that their result can be extended to any dimension  $d$ , then our goal becomes to approximate this solution. To that end, we consider the following Euler scheme associated to (0.1) with a time-step  $h \in (0, 1)$  and a discretisation  $\{kh, k \in \llbracket 0, \lfloor \frac{1}{h} \rrbracket \rrbracket\}$

$$X_t^{h, n} = X_0 + \int_0^t b^n(X_{r_h}^{h, n}) dr + B_t,$$

where  $r_h = h \lfloor \frac{r}{h} \rfloor$  is the leftmost point in the discretisation from  $r$  and  $\{b^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  is a sequence that approximates  $b$ . In particular, we want

$$\begin{cases} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|b^n\|_{\mathcal{B}_p^\gamma} \leq \|b\|_{\mathcal{B}_p^\gamma} < \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|b^n - b\|_{\mathcal{B}_p^{\gamma'}} = 0 \end{cases} \quad \forall \gamma' < \gamma.$$

For such a sequence, we prove the following theorem.

**Theorem 0.1.** *Let  $B$  be an  $\mathbb{F}$ -fBm of Hurst parameter  $H < \frac{1}{2}$ . Let  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $p \in [1, \infty]$ ,  $b \in \mathcal{B}_p^\gamma$  and assume (0.2). Let  $m \in [2, \infty]$ . Let  $X$  denote a weak solution to (0.1) such that*

$$\sup_{\substack{s, t \in [0, 1] \\ s < t}} \frac{\|X_t - B_t - X_s + B_s\|_{L^m}}{|t - s|^{\frac{1}{2}+H}} < \infty.$$

*Let  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ . Then there exists a constant  $C$  that depends only on  $m, p, \gamma, \varepsilon, \|b\|_{\mathcal{B}_p^\gamma}$  such that for all  $h \in (0, 1)$  and  $n \in \mathbb{N}$ , the following bound holds :*

$$\sup_{t \in [0, 1]} \left\| X_t - X_t^{h, n} \right\|_{L^m} \leq C \left( \|b^n - b\|_{\mathcal{B}_p^{\gamma-1}} + \|b^n\|_{\infty} h^{\frac{1}{2}-\varepsilon} + \|b^n\|_{\infty} \|b^n\|_{\mathcal{C}^1} h^{1-\varepsilon} \right).$$

Choosing  $b^n = Gb_{\frac{1}{n}}$  (where  $G$  is the Gaussian kernel) and  $n = \lfloor h^{-\frac{1}{1-\gamma+\frac{d}{p}}} \rfloor$ , we prove the following rate of convergence

$$\sup_{t \in [0, 1]} \left\| X_t - X_t^{h, n} \right\|_{L^p} \leq Ch^{\frac{1}{2(1-\gamma+\frac{d}{p})}}.$$

<i>The drift</i>	$\gamma - \frac{d}{p} \rightarrow (1 - \frac{1}{2H})^+$	$\gamma - \frac{d}{p} \in (1 - \frac{1}{2H}, 0)$	$\gamma - \frac{d}{p} = 0$	$\gamma - \frac{d}{p} > 0$
<i>Convergence</i>	$H - \varepsilon$	$\frac{1}{2(1-\gamma+\frac{d}{p})} - \varepsilon$	$\frac{1}{2} - \varepsilon$	$(\frac{1}{2} + H(\gamma - \frac{d}{p})) \wedge 1 - \varepsilon$

TABLE 1 – Summary : Order of convergence of the Euler-Maruyama scheme to the solution of the SDE (0.1) for  $\gamma - \frac{d}{p} > 1 - \frac{1}{2H}$ .

## Références

- [1] Lukas Anzeletti, Alexandre Richard, and Etienne Tanré. Regularisation by fractional noise for one-dimensional differential equations with nonnegative distributional drift. *arXiv preprint arXiv :2112.05685*, 2021.
- [2] Siva Athreya, Oleg Butkovsky, Khoa Lê, and Leonid Mytnik. Well-posedness of stochastic heat equation with distributional drift and skew stochastic heat equation. *arXiv preprint arXiv :2011.13498*, 2020.
- [3] Oleg Butkovsky, Konstantinos Dareiotis, and Máté Gerencsér. Approximation of SDEs : a stochastic sewing approach. *Probab. Theory Related Fields*, 181(4) :975–1034, 2021.
- [4] Konstantinos Dareiotis, Máté Gerencsér, and Khoa Lê. Quantifying a convergence theorem of gyöngy and krylov. *arXiv preprint arXiv :2101.12185*, 2021.
- [5] Tiziano De Angelis, Maximilien Germain, and Elena Issoglio. A numerical scheme for stochastic differential equations with distributional drift. *arXiv preprint arXiv :1906.11026*, 2019.
- [6] Mihai Gradinaru and Ivan Nourdin. Milstein’s type schemes for fractional sdes. In *Annales de l’IHP Probabilités et statistiques*, volume 45, pages 1085–1098, 2009.
- [7] Benjamin Jourdain and Stéphane Menozzi. Convergence rate of the euler-maruyama scheme applied to diffusion processes with  $l^q - l^p$  drift coefficient and additive noise. *arXiv preprint arXiv :2105.04860*, 2021.
- [8] Peter E Kloeden and Eckhard Platen. Stochastic differential equations. In *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, pages 103–160. Springer, 1992.
- [9] Khoa Lê. A stochastic sewing lemma and applications. *Electronic Journal of Probability*, 25 :1–55, 2020.
- [10] Thomas Müller-Gronbach and Larisa Yaroslavtseva. Sharp lower error bounds for strong approximation of sdes with discontinuous drift coefficient by coupling of noise. *arXiv preprint arXiv :2010.00915*, 2020.
- [11] Andreas Neuenkirch. Optimal approximation of sde’s with additive fractional noise. *Journal of Complexity*, 22(4) :459–474, 2006.
- [12] Andreas Neuenkirch and Ivan Nourdin. Exact rate of convergence of some approximation schemes associated to sdes driven by a fractional brownian motion. *Journal of Theoretical Probability*, 20(4) :871–899, 2007.
- [13] Andreas Neuenkirch and Michaela Szölgényi. The euler-maruyama scheme for sdes with irregular drift : convergence rates via reduction to a quadrature problem. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 41(2) :1164–1196, 2021.
- [14] Ivan Nourdin. Schémas d’approximation associés à une équation différentielle dirigée par une fonction höldérienne ; cas du mouvement brownien fractionnaire. *Comptes Rendus Mathématique*, 340(8) :611–614, 2005.
- [15] Etienne Pardoux and Denis Talay. Discretization and simulation of stochastic differential equations. *Acta Applicandae Mathematica*, 3(1) :23–47, 1985.

- [16] Michaela Szölgyenyi. Stochastic differential equations with irregular coefficients : ~ mind the gap! *arXiv preprint arXiv :2104.11505*, 2021.
- [17] Dai Taguchi. A generalized avikainen's estimate and its applications. *arXiv preprint arXiv :2001.05608*, 2020.
- [18] Denis Talay and Luciano Tubaro. Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations. *Stochastic analysis and applications*, 8(4) :483–509, 1990.
- [19] Larisa Yaroslavtseva. An adaptive strong order 1 method for sdes with discontinuous drift coefficient. *arXiv preprint arXiv :2102.13155*, 2021.

## Modeling and Imagery Approach of Spatiotemporal Development of Intra-host Pathogens with Growing Lesions

Sheila Rae E. Permanes, YUCEF MAMMERI, MELEN LECLERC

*Université de Picardie Jules Verne, LAMFA CNRS, Institut Camille Jordan CNRS  
- Université Jean Monnet, Institut National de Recherche pour l'Agriculture,  
l'alimentation et l'environnement INRAE*

**Email** : sheila.rae.permanes@etud.u-picardie.fr

**Mots Clés** : plant pathogen, spatio-temporal, level set, optical flow

**Biographie** – The researcher is a PhD in Mathematics student of Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée (LAMFA), UPJV, Amiens under the supervision of Prof. Youcef Mammeri and co-supervision of Melen Leclerc. She is also affiliated with Caraga State University, Philippines and a PhilFrance-DOST Scholar. The thesis is under a multidisciplinary joint work with the INRAE Bretagne Démécologie Team under the "MODIM" project of the Plant Health and Environmental Division of INRAE. The thesis project aims to model the spatiotemporal development of interactions with host-pathogen. Considering pathogens causing increasing lesions on aerial parts of plants and using multimodal image sequences acquired for several pathosystems, the work involves identifying PDE models that sparingly describe the interactions observed. For this presentation, the researcher will discuss the initial results of her thesis which includes the implementation of the level set method in comparing the observed images with the obtained solutions with respect to the leaf deformation, and the estimators of leaf deformation.

### Resumé :

As plant pathogens increase world-wide, there is also a growing concern on studying its within-host spread. In the study of Leclerc et al. [1], the spatio-temporal dynamics of plant pathogen interactions were tackled by combining image-based phenotyping with mathematical modeling. In this study, we utilized the same images of the spread of *Peyronellaepinodes* on pea stipules that were monitored daily with visible imaging.

The level set method has been used widely in the medical field particularly in human health. Inspired by its application in human health, a new approach in plant health is developed in this study using the same method. Along with its numerical schemes, the method is used in this study to model and analyze the spatiotemporal dynamics of host-pathogen interactions when the pathogen causes growing lesions on host tissues.

Methods of optical flow estimation using the advection equation where the leaf deformation is to be determined is implemented. We will compare two methods of optical flow estimation, namely, the Lucas and Kanade method and the Sapiro method to estimate the deformation of pea cultivars with respect to velocity. Different norms were computed and were illustrated using line graphs, comparing the changes from day 3 to day 7 of the two pea cultivars. The leaf deformation of Solara cultivars is found to be more dispersed, with higher velocities observed in majority of the observations. Moreover, there are relatively many significantly observed extreme values in Solara than in James. Higher velocities are also observed from Day 6 to Day 7 and Day 4 to Day 5 in James and Solara, respectively.

## Références

- [1] M. Leclerc, S. Jumel, F. Hamelin, N. Treilhaud, R. and Parisey, and Y. Mammeri. Imaging with spatio-temporal modelling to characterize the dynamics of plant-pathogen lesions. *bioRxiv*, 2022.

## Locomotion flagellaire de micro-organismes (Présentation orale)

J. Levillain, F. ALOUGES, A. LEFEBVRE-LEPOT  
 CMAP, Ecole Polytechnique

Email : jessie.levillain@polytechnique.edu

Mots Clés : Mathématiques Appliquées, Equations aux dérivées partielles, contrôle, biophysique, méthodes numériques, éléments finis

### Biographie –

Actuellement en première année de thèse au CMAP (financée par une bourse de l'EDMH), je me concentre sur l'étude des micro-nageurs, leur modélisation, mais aussi leur contrôlabilité. J'ai trouvé cette thèse suite à mon Master 2 à l'Université Paris-Saclay (parcours AMS), que j'ai effectué après une année de stage pré-doctoral à l'étranger sur les méthodes numériques, dans le cadre de mon parcours à l'ENS Paris-Saclay. Pour plus de détails: <https://jesnial.github.io/>.

### Resumé :

De nombreuses modélisations simples tentent d'expliquer la locomotion de micro-organismes qui évoluent dans un fluide. En effet, la compréhension de ces systèmes est cruciale pour de nombreux domaines des sciences, et en particulier en biologie, car des organismes tels que les bactéries, les spermatozoïdes ou les micro-algues sont à l'origine de la vie.

Cependant, à cause de leur taille réduite, les micro-nageurs se retrouvent dans une configuration à bas nombre de Reynolds, où l'inertie est négligeable par rapport aux effets visqueux du fluide et où les écoulements deviennent réversibles. Si ces organismes emploient des stratégies variées pour parvenir à nager, une grande partie d'entre eux utilisent néanmoins un ou plusieurs flagelles pour se mouvoir. Nous explorons ici des modèles de nageurs très simplifiés qui pourraient permettre de mieux comprendre le fonctionnement des flagelles.

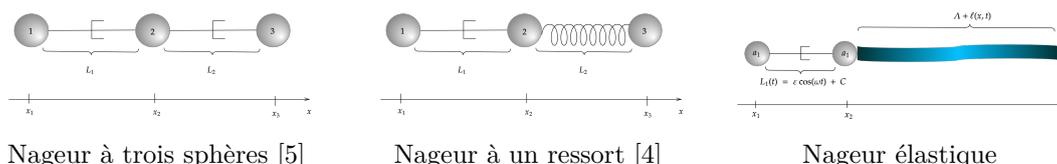


TABLE 1 – Modèles simples de micro nageurs.

Un des premiers modèles simples a été proposé dans [5], où le nageur est composé de trois sphères reliées par des bras rigides mais extensibles, comme illustré en figure 1. Ce modèle a ensuite été étendu à un nageur doté d'un ressort dans [4]. Nous proposons ensuite un système obtenu par passage à la limite d'un nombre infini de ressorts de plus en plus petits [2]. Cependant, nous avons observé que l'onde qui se propage dans le flagelle s'amortit très rapidement.

Une observation similaire a également été faite par Machin [3], qui démontre que l'oscillation observée le long d'un flagelle de spermatozoïde n'est possible qu'en présence d'un mécanisme actif interne au système prédisant le rôle des moteurs moléculaires qui activent le flagelle [1], et n'était donc pas causée par une impulsion venant de la tête de l'organisme. Nous avons donc par la suite modélisé puis simulé numériquement ce mécanisme interne, afin de comprendre comment l'oscillation du flagelle du spermatoïde était générée.

## Références

- [1] Frank Jülicher. Force and motion generation of molecular motors : A generic description. page 46–74.
- [2] Jessie Levillain. Etude de modèles simples de micro nageurs. *Rapport de stage de Master 2 encadré par François Alouges et Aline Lefebvre-Lepot*, 2021.
- [3] K. E. MACHIN. Wave Propagation along Flagella. *Journal of Experimental Biology*, 35(4) :796–806, 12 1958.
- [4] Alessandro Montino and Antonio DeSimone. Three-sphere low-reynolds-number swimmer with a passive elastic arm. *The European Physical Journal E*, 38 :1–10, 2015.
- [5] Ali Najafi and Ramin Golestanian. Simple swimmer at low reynolds number : Three linked spheres. *Phys. Rev. E*, 69 :062901, Jun 2004.

## Speckle statistics in stochastic homogenization regime

QUENTIN GOEFFERT, JOSSELIN GARNIER, LAURE GIOVANGIGLI, PIERRE MILLIEN  
 UMA ENSTA Paris, CMAP, Institut Langevin

Email : quentin.goefert@ensta-paris.fr

Mots Clés : Stochastic homogenization

**Biographie** – Suite à mon cursus à l'ENSTA Paris, je décide de poursuivre une thèse en mathématiques appliquées. J'essaye d'appliquer les méthodes de l'homogénéisation stochastique à un modèle qui vise à décrire au mieux la propagation des ondes acoustiques en imagerie ultrasonore.

### Resumé :

In biological ultrasound imaging, the measured quantity is the backscattered wave generated by a large number of unresolved subwavelength scatterers. These scatterers can be modeled as inhomogeneities in density and compressibility. In the Born approximation, the back-scattered field is well understood, but the assumption does not hold when the number of scatterers becomes very large, which is the case in many situations. Stochastic homogenization techniques do not rely on single diffusion approximation and can be an accurate model to describe the backscattered field.

Here  $d$  denotes the dimension,  $d = 1, 2$  or  $3$ .

Let  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  be the probability space and let  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^d$  be the medium in which lie small randomly placed inhomogeneities of size  $\epsilon > 0$ . We denote by  $a_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  the density and  $n_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$  the compressibility. We suppose that the outer medium  $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{M}}$  is homogeneous of parameters  $(I, 1)$ . The inhomogeneities  $(\epsilon S_i^\omega)_{i \in \mathbb{N}^*}$  have constant parameters denoted by  $(a_{S_i}^\omega)_{i \in \mathbb{N}^*}$  and  $(n_{S_i}^\omega)_{i \in \mathbb{N}^*}$  and lie in a homogeneous background with properties  $(a_m, n_m)$ .

For all  $x \in \mathbb{R}^d$  and a.e.  $\omega \in \Omega$ , the density and compressibility are therefore modeled by :

$$\begin{cases} a_\epsilon(x) := a_m(I + \eta_a(x/\epsilon, \omega))\chi_{\mathcal{M}}(x) + (1 - \chi_{\mathcal{M}}(x))I \\ n_\epsilon(x) := n_m(1 + \eta_n(x/\epsilon, \omega))\chi_{\mathcal{M}}(x) + (1 - \chi_{\mathcal{M}}(x))1 \end{cases}$$

with

$$\begin{aligned} \eta_a(x, \omega) &= \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \left( a_m^{-1} a_{S_i}^\omega - I \right) \chi_{S_i^\omega}(x) \\ \eta_n(x, \omega) &= \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \left( \frac{n_{S_i}^\omega}{n_m} - 1 \right) \chi_{S_i^\omega}(x) \end{aligned}$$

The medium contains around  $\epsilon^{-d}$  particles, spaced from each other by a distance of order  $\epsilon$ , so that we are in the homogenization regime.

We excite the medium by a time-harmonic plane wave  $u^i$ . An example is shown on figure 1.

The total field  $u_\epsilon = u^i + u_\epsilon^s$  is the solution of :

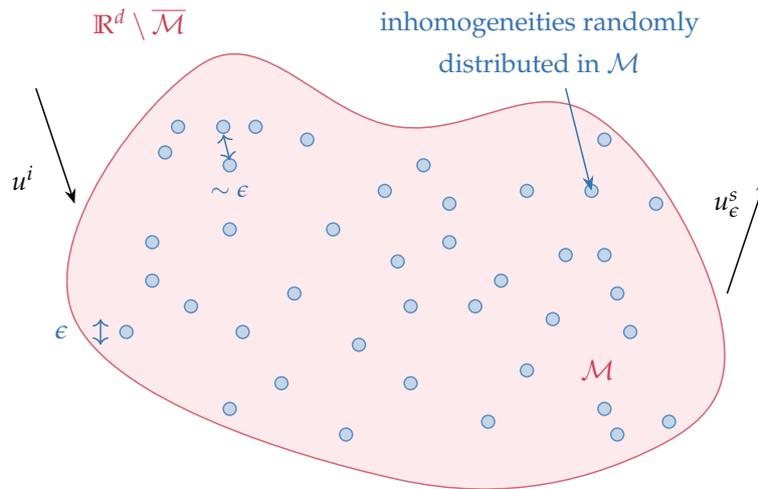


FIGURE 1 – Setup of the scattering problem

$$\begin{cases} \Delta u_\epsilon^s + k^2 u_\epsilon^s = 0 & \text{in } \mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{M}} \\ \nabla \cdot (a_\epsilon \nabla u_\epsilon) + k^2 n_\epsilon u_\epsilon = 0 & \text{in } \mathcal{M} \\ (u_\epsilon^s + u^i) = u_\epsilon & \text{on } \partial \mathcal{M} \\ \nabla (u_\epsilon^s + u^i) \cdot \nu = a_\epsilon \nabla u_\epsilon \cdot \nu & \text{on } \partial \mathcal{M} \end{cases} \quad (1)$$

along with the Sommerfeld radiation condition on the scattered wave field  $u_\epsilon^s$ . This problem has already been studied in [1] in the periodic case.

Under the stationary and ergodic assumption, it can be shown [2] that the solution  $u_\epsilon$  converges in almost surely weakly in  $H_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$  towards a homogenized field  $u_0 = u^i + u_0^s$  solution of :

$$\begin{cases} \Delta u_0^s + k^2 u_0^s = 0 & \text{in } \mathbb{R}^d \setminus \overline{\mathcal{M}} \\ \nabla \cdot (a^* \nabla u_0) + k^2 n^* u_0 = 0 & \text{in } \mathcal{M} \\ (u_0^s + u^i) = u_0 & \text{on } \partial \mathcal{M} \\ \nabla (u_0^s + u^i) \cdot \nu = a^* \nabla u_0 \cdot \nu & \text{on } \partial \mathcal{M} \end{cases} \quad (2)$$

complemented with the radiation condition on  $u_0^s$ , for some positive definite and constant tensor  $a^*$  and positive constant  $n^*$ .

Though, the field  $u_0$  only yields the effective properties of the medium. Therefore, it is not enough accurate to describe the backscattered field. A thinner analysis allows us to describe the behavior of the speckle field generated by the large number of inhomogeneities.

## Références

- [1] Fioralba Cakoni and Bojan B. Guzina and Shari Moskow, On the Homogenization of a Scalar Scattering Problem for Highly Oscillating Anisotropic Media, *SIAM J. Math. Anal.* **48** (2016), pp. 2532-2560.
- [2] A. Gloria, S. Neukamm and F. Otto, Quantitative estimates in stochastic homogenization for correlated coefficient fields (2019).
- [3] Duerinckx, Mitia and A. Gloria, Multiscale functional inequalities in probability : Constructive approach *arXiv preprint arXiv :1711.03152*,(2017).

# Analyse mathématique de la dynamique d'une épidémie sur un graphe : exemple du COVID-19 à Djibouti.

Doctorant : Mohamed Abdi Abdoulrazack  
*Directrice de thèse : Cathérine Choquet*  
*Lab. MIA, La Rochelle Université, France*  
*et Université de Djibouti, Campus de Balbala, Djibouti.*  
abdoulrazack\_mohamed\_abdi@univ.edu.dj

30 juin 2022

Pour modéliser des systèmes complexes dans lesquels beaucoup d'éléments ou de compartiments interagissent, la modélisation mathématique en réseau de graphes propose une approche systématique dans laquelle les éléments sont représentés par des nœuds et les interactions par des liens. Les relations entre plusieurs compartiments d'un même modèle sont décrites par des matrices d'adjacence. Les événements récents nous montre que cette science est devenu indispensable pour l'étude de la dynamique de propagation, utilisée pour modéliser la transmission d'un virus qui se propage par contact au sein d'une population et à partir d'un réseau de graphe. On s'intéresse au développement de méthodes d'analyse pour caractériser la transition de phase des dynamiques de propagation sur réseaux, plus particulièrement au modèle susceptible infecté rétablis. Nous proposons un cadre théorique pour l'étude d'un modèle, conduisant à une description autonome de l'état statique du système. Ceci nous permet d'obtenir un certain nombre de résultats analytiques associés au phénomène critique, incluant le calcul du taux de reproduction de base  $R_0$ . Ensuite, nous comparons ce résultat au modèle sans réseau de graphe. Ces résultats, nous donnent une meilleure compréhension sur l'évolution du virus et la façon dont chaque nœuds se comporte au-delà du seuil épidémique.

## Références

- [1] W. Mei, S. Mohagheghi, S. Zampieri, and F. Bullo, "On the dynamics of deterministic epidemic propagation over networks," *Annual Reviews in Control*, vol. 44, pp. 116–128, 2017.
- [2] Cui, "Global stability of multi-group SIR epidemic model with group mixing and human movement," *Mathematical Biosciences and Engineering*, vol. 16, no. 4, pp. 1798–1814, 2019.
- [3] M. Mesbahi and M. Egerstedt, "Graph theoretic methods in multiagent networks," 2010.
- [4] Y. Souleiman, A. Mohamed, and L. Ismail, "Analysis the dynamics of sihr model : Covid-19 case in djibouti," *Applied Mathematics*, vol. 12, no. 10, pp. 867–881, 2021.

# The Expanded PRUNUS Model: Invasion Dynamics Modeling of Tree Populations under Macro-climatic Conditions

Karen B. Burdeos, J. LENOIR, F. PACCAUT, Y. MAMMERI

Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée (LAMFA) CNRS  
UMR 7352, Université de Picardie Jules Verne

**Email** : kbburdeos@carsu.edu.ph; karen.burdeos@etud.u-picardie.fr

**Mots Clés** : population dynamics modelling; PRUNUS model; climate change modeling

**Biographie** – The main author is a full-time Statistics and Mathematics faculty at the Mathematics Department of Caraga State University, Philippines. Now on study leave, she is taking Doctor of Philosophy in Applied Mathematics at the Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée (LAMFA) in the Université de Picardie Jules Verne, Amiens. Her study focuses on mathematical modeling of the complex forest environment which also accounts for climate change.

## Resumé :

The *PRUNUS* model was developed to describe the spatial invasion of *Prunus Serotina*. This model incorporates various factors influencing the birth, spread, and distribution of the above invading species. The model includes disturbance, propagule pressure and residence time, long-distance dispersal, and heterogeneity characteristics of the environment as key processes in the invasion dynamics [1]. This model, however, only considers the population dynamics of a single plant species in a forest ecosystem.

Population dynamics in a forest ecosystem is defined by considering various factors that significantly affect the movement and interaction of different species under its current conditions. Our research study proposes a new flexible generic model of plant invasion dynamics. Our model expands the utility of the *PRUNUS* model. With the expanded model, the following features and functions will be incorporated : (a) considers n number of plant species ; (b) accounts interaction/competition with animal/ pest/ fungus species ; (c) incorporates some other factors such as anthropogenic disturbances and other bio-climatic parameters in the population dynamics modeling ; and (d) more sophisticated and relevant methodologies and approaches for population dynamics modeling. This will help to understand the trees population dynamics in a forest ecosystem.

## Références

- [1] E. Sebert-Cuvillier, M. Simonet, V. Simon-Goyheneche, F. Paccaut, O. Goubet, and G. Decocq. PRUNUS : a spatially explicit demographic model to study plant invasions in stochastic, heterogenous environments. *Biol Invasions Springer*, 2009.

## Jeudi 22 septembre

### Conférence plénière – 9h30

- Nicolas Curien, *Sur la constante de Cheeger des graphes et surfaces hyperboliques*
- 

### Session Probabilités, Statistiques et Applications 1 – 11h00

- Yohan Hosten, *Sur les densités asymptotiques d'ensembles définis par la fonction somme-des-chiffre*
- Inass Soukariéh, *Regenerative Bootstrap of Harris atomic Markov U -process*
- Guillaume Blanc, *Propriétés fractales de la métrique Aldous Kendall*

### Session Équations aux dérivées partielles appliquées à la physique 1 – 11h00

- Spyridon Filippas, *Prolongement unique quantitatif pour équations d'onde en milieu singulier et applications*
  - Romain Loyer, *Développement d'optique géométrique pour des problèmes aux limites faiblement bien posé : la dégénérescence en zone de glancing*
  - Mirna Charif, *Comportement asymptotique de grandes valeurs propres pour le modèle de Rabi asymétrique à deux photons.*
- 

### Session Probabilités, Statistiques et Applications 2 – 14h00

- Camille Frévent, *Statistiques de scan spatiales pour données fonctionnelles multivariées*
- Corentin Houpert, *Inverse Problems for Stochastic Neutronics*
- Ahmad Darwiche, *On the rate of convergence of weighted oscillating ergodic averages*

### Session Problèmes inverses – 14h00

- Angèle Niclas, *Reconstruction de défauts dans des plaques élastiques en utilisant des fréquences localement résonnantes*
  - Rémi Robin, *Quelques problèmes d'optimisations pour les stellarators*
  - Tuan-Anh Vu, *Analyse de la convergence de certaines méthodes d'inversion multi-étapes de type one-shot*
- 

### Session posters – 16h00

- Itidel Abdallah, *Contribution à l'étude des modèles fluides stochastiques avec sauts*
- Pierre Catoire, *Algèbres de Hopf dendriiformes et tridendriiformes*
- Vincent Gozé, *Le théorème des nombres premier*
- Eliabelle Mauduit, *Application du processus KDD dans une démarche d'amélioration de la qualité de vie au travail*
- Julie Wetzler, *Hooley's function along friable integers*

## Sur les densités asymptotiques d'ensembles définis par la fonction somme-des-chiffres

**Yohan Hosten**

*Université de Picardie Jules Verne*

**Email** : [yohan.hosten@u-picardie.fr](mailto:yohan.hosten@u-picardie.fr)

### **Resumé :**

On s'intéresse à la variation de la somme des chiffres quand on ajoute un entier  $r$  fixé. Ce problème dépend évidemment du système de numération. Dans le cadre de la thèse, on s'est concentré sur les systèmes de numération en base entière (base  $b$ ) ainsi que sur un autre système appelé « représentation de Zeckendorf » (liée à la suite de Fibonacci). On énoncera quelques résultats de la thèse (existence et propriétés de la loi de proba sous-jacente, propriété de mélange, TCL dans le cas base entière).

## Regenerative Bootstrap of Harris atomic Markov $U$ -process.

Inass SOUKARIEH, SALIM BOUZEEDA

*Université de Technologie de Compiègne, Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Compiègne, LMAC.*

**Email :** inass.soukarieh@utc.fr

**Mots Clés :** Bootstrap, Markov chains, regenerative processes, empirical processes, VC classes of functions,  $U$ -processes, Donsker classes, Central limit theorem.

**Biographie** – Inass SOUKARIEH, PhD student, specialized in applied Mathematics, statistics, and stochastic processes. I received my MS degree in Mathematical Modeling and Applications from the Lebanese University, where I passed my internship at the University of Montpellier, Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, and LIRMM, in the biostatistics field. Recently, I am preparing for a Ph.D. degree, with the University of Technologie of Compiègne, on the  $U$ -processes in Markov and dependent setting: Asymptotic and Bootstrap.

**Resumé :** The following work is designed to establish bootstrap uniform functional central limit theorems  $U$ -processes for Harris recurrent Markov chains over uniformly classes of functions satisfying some entropy conditions. To simplify our approach, we will employ the well-known regenerative properties of Markov chains avoiding some complicated mixing conditions. Our result is obtained under minimal condition on the envelope function. We next consider an extension to the  $k$  Markov chain setting and prove the bootstrap consistency. The theoretical uniform central limit theorems set out below are (or will be) key tools for many further developments in Markovian data analysis. In the present work, we are interested in the bootstrap for the  $U$ -processes based on Markov chains. Results on the bootstrap for the empirical processes based on Markov chains are reported in [9] and [4]. Bootstrap of  $U$ -statistics in the independent setting are investigated in [5], [1] and [3], and in dependent setting in [6], [7] and [10]. Most related work of the present paper is ([2]). In the last reference, the authors provided an approach to the study of  $U$ -statistics in the Markovian setup based on the (pseudo-) regenerative properties of Harris Markov chains. Exploiting the fact that any sample path  $X_1, \dots, X_n$  of a general Harris chain  $X$  may be divided into asymptotically independent and identically distributed (i.i.d.) data blocks. This kind of regeneration in Markov chains has been detailed in the paper of [8]. Similar approach will be used in our work, without restriction to the case  $m = 2$ . In the present paper, we consider the general framework of the  $U$ -processes in the Markov chain setting and their bootstrapped versions. This investigation is far from being trivial and harder to control the equicontinuity, which form a basically unsolved open problem in the literature. Our work aims at filling this gap in the literature. However, as will prove later, the problem requires much more than *simply* combining ideas from the existing results. The main difficulties in proving our results are related to the random size of the resampled blocks. This creates problems with random stopping times (in real and Banach space setting). In fact, delicate mathematical derivations will be required to cope with  $U$ -processes in our context. This requires the effective application of large sample theory techniques, which were developed for the empirical processes.

## Références

- [1] Miguel A. Arcones and Evarist Giné.  $U$ -processes indexed by Vapnik-Červonenkis classes of functions with applications to asymptotics and bootstrap of  $U$ -statistics with estimated parameters. *Stochastic Process. Appl.*, 52(1) :17–38, 1994.
- [2] P. Bertail and S. Cléménçon. A renewal approach to Markovian  $U$ -statistics. *Math. Methods Statist.*, 20(2) :79–105, 2011.
- [3] Xiaohui Chen. Gaussian and bootstrap approximations for high-dimensional  $U$ -statistics and their applications. *Ann. Statist.*, 46(2) :642–678, 2018.
- [4] Gabriela Cioł ek. Bootstrap uniform central limit theorems for Harris recurrent Markov chains. *Electron. J. Stat.*, 10(2) :2157–2178, 2016.
- [5] Miklós Csörgő and Masoud M. Nasari. Asymptotics of randomly weighted  $u$ - and  $v$ -statistics : application to bootstrap. *J. Multivariate Anal.*, 121 :176–192, 2013.
- [6] Herold Dehling and Martin Wendler. Central limit theorem and the bootstrap for  $U$ -statistics of strongly mixing data. *J. Multivariate Anal.*, 101(1) :126–137, 2010.
- [7] Anne Leucht and Michael H. Neumann. Degenerate  $U$ - and  $V$ -statistics under ergodicity : asymptotics, bootstrap and applications in statistics. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 65(2) :349–386, 2013.
- [8] Esa Nummelin. Renewal representations for Markov operators. *Adv. Math.*, 90(1) :15–46, 1991.
- [9] Dragan Radulović. Renewal type bootstrap for Markov chains. *Test*, 13(1) :147–192, 2004.
- [10] Olimjon Sh. Sharipov, Johannes Tewes, and Martin Wendler. Bootstrap for  $U$ -statistics : a new approach. *J. Nonparametr. Stat.*, 28(3) :576–594, 2016.

## Propriétés fractales de la métrique aléatoire d'Aldous–Kendall

Guillaume Blanc,  
*Université Paris-Saclay,*

**Email** : guillaume.blanc1@universite-paris-saclay.fr

**Mots Clés** : Probabilités, géométrie aléatoire, processus de Poisson, dimension de Hausdorff

**Biographie** – Je suis actuellement en deuxième année de thèse à l'Université Paris-Saclay, sous la direction de Nicolas Curien et Arvind Singh. Je travaille en Probabilités, et plus particulièrement en géométrie aléatoire. Avant cela, j'étais élève à l'École normale supérieure Paris-Saclay, et ma bourse de thèse est un Contrat Doctoral Spécifique Normaliens. J'ai rencontré mes directeurs lorsque j'étais étudiant au M2 Mathématiques de l'Aléatoire de l'Université Paris-Saclay.

### Resumé :

L'objet d'étude de cet exposé est une métrique aléatoire sur  $\mathbb{R}^d$ , construite par Kendall [2] à partir d'un processus de Poisson de routes, i.e. de droites avec une limitation de vitesse. Intuitivement, le processus fournit un réseau de routes aléatoire sur  $\mathbb{R}^d$ , sur lequel on peut se déplacer en respectant les limitations de vitesse : cela munit naturellement l'espace d'une métrique aléatoire, la distance entre deux points étant donnée par le temps de trajet optimal entre ces deux points. Au cours de l'exposé, je présenterai les propriétés fractales de cette métrique [1], après avoir précisé sa construction.

Pour expliquer plus en détail dans ce résumé, notons  $\mathbb{L}_d$  l'espace des droites affines de  $\mathbb{R}^d$ , et appelons *route* tout élément  $(\ell, v)$  de  $\mathbb{L}_d \times \mathbb{R}_+^*$ , le réel positif  $v$  correspondant à la limitation de vitesse sur la droite  $\ell$ . Sur  $\mathbb{L}_d$ , soit  $\mu_d$  l'unique mesure borélienne invariante par rotation et translation telle que

$$\mu_d \{ \ell \in \mathbb{L}_d : \ell \text{ rencontre } \overline{B}(0, 1) \} = 1,$$

où  $\overline{B}(0, 1)$  désigne la boule euclidienne unité fermée. Fixant un paramètre  $\gamma > d$ , on considère une mesure aléatoire de Poisson  $\Pi$  d'intensité  $\mu_d \otimes v^{-\gamma} dv$  sur  $\mathbb{L}_d \times \mathbb{R}_+^*$  ; c'est notre processus. Pour  $A \subset \mathbb{L}_d$  et  $B \subset \mathbb{R}_+^*$  boréliens, le nombre  $\Pi(A \times B)$  compte les routes  $(\ell, v)$  jetées par le processus dans l'ensemble  $A \times B$ . En tant qu'objet, c'est une variable aléatoire à valeurs dans  $[0, \infty]$ , de loi de Poisson de paramètre  $\mu_d(A) \cdot \int_B v^{-\gamma} dv$ .

D'après les propriétés du processus, la donnée des routes jetées par  $\Pi$  est équivalente à celle de la fonction (aléatoire) limitation de vitesse  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ , définie par

$$V(x) = \sup \{ v ; (\ell, v) \in \Pi : \ell \ni x \} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d,$$

avec la convention  $\sup \emptyset = 0$ . Maintenant, pour donner un sens à "se déplacer sur le réseau en respectant les limitations de vitesse", on introduit les  $\Pi$ -paths : un  $\Pi$ -path est un chemin continu  $\xi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , pour lequel il existe une fonction intégrable  $\dot{\xi} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t \dot{\xi}(s) ds \quad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

avec  $|\dot{\xi}(t)| \leq V(\xi(t))$  pour presque tout  $t \in [0, T]$ . D'habitude — par exemple en analyse complexe — on considère plutôt des chemins  $C^1$  par morceaux, mais dans notre cas on a besoin de cette définition plus large pour qu'il soit possible de relier chaque paire de points par un chemin. Notons que cela n'est pas garanti a priori ; d'autant que par construction, la probabilité qu'une route du processus traverse l'origine est nulle. Pour autant, et c'est un théorème de Kendall [2] :

presque sûrement, pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , il existe un  $\Pi$ -path  $\xi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  tel que  $\xi(0) = x$  et  $\xi(T) = y$ . En particulier, cela a du sens de considérer le temps de trajet optimal, donné par

$$T(x, y) = \inf \{T > 0 : \text{il existe un } \Pi\text{-path } \xi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ tel que } \xi(0) = x \text{ et } \xi(T) = y\}$$

pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , et il n'est pas difficile de vérifier que la fonction  $T : (x, y) \mapsto T(x, y)$  est une distance sur  $\mathbb{R}^d$ . Bien entendu, celle-ci dépend du processus à travers la notion de  $\Pi$ -path, ainsi elle est aléatoire : l'enjeu est d'étudier les propriétés de l'espace métrique aléatoire  $(\mathbb{R}^d, T)$ . Celles dont il est question ici sont les propriétés fractales suivantes.

**Théorème.** *Presque sûrement, l'espace métrique  $(\mathbb{R}^d, T)$  est homéomorphe à l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$  usuel, et sa dimension de Hausdorff est donnée par*

$$\dim_H(\mathbb{R}^d, T) = \frac{(\gamma - 1)d}{\gamma - d} > d.$$

Le mot fractal signifie ici que la dimension de Hausdorff  $s = (\gamma - 1)d/(\gamma - d)$  est strictement supérieure à la "dimension topologique"  $d$ . Cette propriété est bien connue pour d'autres modèles de géométrie aléatoire, tels que la sphère brownienne [3].

Sans faire intervenir la notion de dimension de Hausdorff, il est possible de donner un énoncé plus ou moins équivalent en termes de volume des boules : on montre que presque sûrement, pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^d$ , on a

$$\lambda(\bar{\Gamma}(x, t)) = t^{s+o(1)} \quad \text{lorsque } t \rightarrow 0^+,$$

où  $\lambda$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ , et  $\bar{\Gamma}(x, t) = \{y \in \mathbb{R}^d : T(x, y) \leq t\}$  est la  $T$ -boule fermée centrée en  $x$  de rayon  $t$ .

## Références

- [1] Guillaume Blanc. Fractal properties of Aldous–Kendall random metric. *arXiv :2207.03349*, 2022.
- [2] Wilfrid S. Kendall. From random lines to metric spaces. *The Annals of Probability*, 45 :469–517, 2017.
- [3] Jean-François Le Gall. Brownian geometry. *Japanese Journal of Mathematics*, 14 :135 – 174, 2019.

## Prolongement unique quantitatif pour équations d'onde en milieu singulier et applications

Spyridon Filippas,  
*Université Paris-Saclay,*

**Email** : spyridon.filippas@universite-paris-saclay.fr

**Mots Clés** : prolongement unique, inégalité de Carleman, ondes avec des sauts, coût du contrôle approché

**Biographie** – Je suis actuellement doctorant au Laboratoire de Mathématiques d'Orsay sous la direction de Matthieu Léautaud et Camille Laurent. J'ai commencé ma thèse en octobre 2020. Avant cela j'ai fait une licence, un Master 2 et le Magistère de Mathématiques à l'université d'Orsay. Je travaille sur l'analyse des EDP et plus précisément autour des questions de prolongement uniques et sur les inégalités de Carleman.

### Resumé :

La question du prolongement unique pour l'équation des ondes peut se formuler de la façon suivante. On observe une onde, qui évolue dans un domaine, par un petit endroit du domaine et pendant un certain temps : l'observation partielle détermine-t-elle l'onde ? Autrement dit, deux observations identiques impliquent-elles que les deux ondes observées sont identiques ?

Du point de vue mathématique, on considère un domaine borné  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ , on se donne un petit ouvert  $\omega \subset \mathcal{M}$  et un intervalle de temps  $(0, T)$ . La question du prolongement unique est la suivante :

$$(\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \text{ sur } (0, T) \times \mathcal{M}, \quad u = 0 \text{ dans } (0, T) \times \omega) \implies u \equiv 0? \quad (1)$$

Cette question se pose naturellement dans différents contextes : par exemple en sismologie [8], lorsqu'il s'agit d'identifier des ondes sismiques à partir d'observations partielles, plus généralement en problèmes inverses [1], et enfin en théorie du contrôle [6]. Le prolongement unique (1) a été démontré dans ce contexte par Tataru [9], Robbiano-Zuily [7] et Hörmander [2] sous les conditions optimales (au vu de la propagation des ondes à vitesse finie) : il suffit que  $\omega$  soit non vide, et que le temps  $T$  soit suffisamment grand :  $T > 2\mathcal{L}(\mathcal{M}, \omega)$ , où  $\mathcal{L}(\mathcal{M}, \omega) = \sup_{x \in \mathcal{M}}(\text{dist}(x, \omega))$  est "la plus grande distance de  $\omega$  à un point de  $\mathcal{M}$ ".

Dans [4], Laurent-Léautaud démontrent une version quantitative du prolongement unique (1). Etant donné  $\omega \subset \mathcal{M}$  ouvert non vide, toutes les solutions de l'équation des ondes  $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$  sur  $(0, T) \times \mathcal{M}$  avec conditions de Dirichlet et données  $(u_0, u_1)$  satisfont :

$$\|(u_0, u_1)\|_{H^1 \times L^2} \leq C e^{\kappa \Lambda} \|u\|_{L^2((0, T) \times \omega)}, \quad \text{avec } \Lambda = \frac{\|(u_0, u_1)\|_{H^1 \times L^2}}{\|(u_0, u_1)\|_{L^2 \times H^{-1}}}, \quad (2)$$

dès lors que  $T > 2\mathcal{L}(\mathcal{M}, \omega)$ . Dans cette inégalité (non-linéaire),  $\Lambda$  représente la fréquence typique des données : on voit que cette inégalité (dite de stabilité logarithmique) dégénère exponentiellement en hautes fréquences. Elle est néanmoins optimale dès que certains rayons optiques ne sont pas captés par  $\omega$  pendant l'intervalle de temps  $(0, T)$  [5].

Motivés par les applications, on veut pouvoir relaxer la régularité  $C^1$  de la métrique  $g^{ij}$ . En effet, dans le contexte des ondes sismiques [8] ou des ondes acoustiques se propageant dans la croûte terrestre, la modélisation macroscopiques prévalente propose une métrique  $(g^{ij}(x))$  qui est régulière par morceaux, mais comporte des sauts de discontinuité le long de certaines hypersurfaces. En effet,

les densités rencontrées sous la surface de la terre sont marquées par diverses discontinuités : par exemple la discontinuité de Mohorovičić entre la croûte terrestre et le manteau. Des propriétés de discontinuité de la métrique à travers une hypersurface sont aussi rencontrées en imagerie médicale. En particulier concernant le cerveau humain, composé de matière grise et de la matière blanche de conductivités électriques très différentes. Le modèle le plus simple se rapproche alors de l'équation des ondes ci-dessus mais avec des coefficients discontinus.

Dans le cadre de ma thèse, les résultats quantitatifs de [3] ont été généralisés dans le contexte singulier. Plus précisément, si  $\mathcal{M}$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$  (ou une variété riemannienne compacte) on considère une interface  $S \subset \mathcal{M}$  qui décompose  $\mathcal{M}$  en deux parties :  $\mathcal{M} \setminus S = \mathcal{M}_- \cup \mathcal{M}_+$ . On considère alors un coefficient scalaire  $c = c(x) = 1_{\mathcal{M}_-}c_-(x) + 1_{\mathcal{M}_+}c_+(x)$  avec  $c_{\pm} \in C^\infty(\mathcal{M}_{\pm})$ . Toutefois le coefficient présente de sauts à travers l'interface  $S$ . On montre alors que l'estimée de stabilité (2) reste encore vraie pour l'opérateur  $\partial_t^2 - \operatorname{div}(c(x)\nabla)$ . L'outil clef est une nouvelle inégalité de Carleman pour l'opérateur des ondes adaptée à la géométrie du problème. Une fois qu'on a cette estimée on utilise les techniques de [3] pour propager l'unicité de façon quantitative.

## Références

- [1] Mikhail Belishev. An approach to multidimensional inverse problems for the wave equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 297(3) :524–527, 1987.
- [2] Lars Hörmander. On the uniqueness of the Cauchy problem under partial analyticity assumptions. In *Geometrical optics and related topics (Cortona, 1996)*, volume 32 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 179–219. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.
- [3] Camille Laurent and Matthieu Léautaud. Quantitative unique continuation for operators with partially analytic coefficients. application to approximate control for waves. *Journal of the European Mathematical Society*, 21(4) :957–1069, nov 2018.
- [4] Camille Laurent and Matthieu Léautaud. Quantitative unique continuation for operators with partially analytic coefficients. Application to approximate control for waves. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 21(4) :957–1069, 2019.
- [5] Gilles Lebeau. Contrôle analytique. I. Estimations a priori. *Duke Math. J.*, 68(1) :1–30, 1992.
- [6] Jacques-Louis Lions. *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1*, volume 8 of *Recherches en Mathématiques Appliquées*. Masson, Paris, 1988.
- [7] Luc Robbiano and Claude Zuily. Uniqueness in the Cauchy problem for operators with partially holomorphic coefficients. *Invent. Math.*, 131(3) :493–539, 1998.
- [8] William W. Symes. A trace theorem for solutions of the wave equation, and the remote determination of acoustic sources. *Math. Methods Appl. Sci.*, 5(2) :131–152, 1983.
- [9] Daniel Tataru. Unique continuation for solutions to PDE's; between Hörmander's theorem and Holmgren's theorem. *Comm. Partial Differential Equations*, 20(5-6) :855–884, 1995.

## Développement d'optique géométrique pour des problèmes aux limites faiblement bien posé: la dégénérescence en zone de glancing

R. Loyer, A. BENOIT, R. LOYER

*Université du Littoral Côte d'Opale, Université du Littoral Côte d'Opale*

**Email :** romain.loyer@univ-littoral.fr

**Mots Clés :** problèmes aux limites hyperboliques, développements d'optique géométrique, faiblement bien posé, mode de glancing.

**Biographie** – Issu d'un parcours Classes Préatoires (Dunkerque), Licence 3 mathématiques (Calais), Master 1 mathématiques fondamentales (Calais) et Master 2 de mathématiques préparation à l'agrégation (Amiens), je suis maintenant en thèse à l'ULCO de Calais sur le sujet "Contrôle d'équations aux dérivées partielles hyperboliques par des méthodes directes" financée par l'ULCO.

### Resumé :

Cet exposé a pour but de finaliser la classification des problèmes aux limites hyperboliques faiblement bien posés dans le demi-espace. Il s'agit d'un travail réalisé en collaboration avec Antoine Benoit.

On s'intéresse à des systèmes d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique linéaires avec conditions de bord de la forme

$$\begin{cases} L(\partial)u := \partial_t u + \sum_{j=1}^d A_j \partial_{x_j} u = f & \text{dans } \Omega_T, \\ Bu|_{x_d=0} = g & \text{sur } \omega_T, \\ u|_{t \leq 0} = 0, & \text{sur } \mathbb{R}_+^d, \end{cases} \quad (1)$$

où la variable d'espace est dans un demi-espace et les espaces sont définies comme suit  $\mathbb{R}_+^d := \{x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d, x_d > 0\}$ ,  $\Omega_T := ]-\infty, T] \times \mathbb{R}_+^d$  et  $\omega_T := ]-\infty, T] \times \mathbb{R}^{d-1}$ .

Le formalisme (1) est assez général pour inclure de nombreux phénomènes physiques de propagation d'onde. En effet, en choisissant bien les coefficients  $A_j$ , l'équation des ondes, l'équation de Maxwell dans le vide ou encore l'équation de l'élastodynamique linéaire isotrope peuvent s'écrire sous la forme (1).

Kreiss dans [6] donne une condition nécessaire et suffisante pour le problème considéré soit fortement bien posé, c'est la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme. Par fortement bien posé, on entend que la solution du problème existe, est unique et a la même régularité que les termes sources, on impose de plus une estimation d'énergie dans laquelle on contrôle la solution par les termes sources dans le même espace :

$$\|u\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|u|_{x_d=0}\|_{L^2(\omega_T)}^2 \leq C_T \left( \|f\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|g\|_{L^2(\omega_T)}^2 \right).$$

Cependant, cette condition peut dégénérer dans quatre zones différentes de l'espace des fréquences que l'on appelle zone elliptique, elliptico-hyperbolique, hyperbolique et glancing et on veut savoir si le problème est faiblement bien posé c'est à dire qu'il existe une unique solution, mais moins régulière (dans des espaces de Sobolev) que les termes sources. La solution a donc des pertes de dérivées à l'intérieur et/ou sur le bord. On s'intéresse en particulier à l'optimalité de ces pertes de dérivée.

On peut citer [7] qui montre que la solution a une perte de dérivée sur le bord mais pas à l'intérieur pour un problème lié à l'élastodynamique et le travail formel de [1] qui établit que la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme peut dégénérer et donc faire que le problème (1) est mal posé pour l'équation d'Euler dans un milieu compressible. L'optimalité pour les trois premières régions possibles a été traitées dans [3] et [2] en utilisant des développements d'optique géométrique qui montrent l'optimalité des estimations à savoir une perte d'une dérivée à l'intérieur et au bord pour la zone hyperbolique, d'une demi-dérivée au bord pour la zone elliptique et d'une demi-dérivée à l'intérieur et au bord pour la zone elliptico-hyperbolique.

L'idée d'un développement d'optique géométrique est de chercher une solution approchée sous la forme d'un développement asymptotique de (1) dans le régime des hautes fréquences. On obtient alors l'optimalité des pertes de dérivées en utilisant cette solution approchée pour saturer l'estimation d'énergie.

Dans notre travail, on s'est donc intéressé à la dégénérescence de la condition de Kreiss-Lopatinskii uniforme dans la dernière zone, à savoir la zone de glancing. Pour déterminer le premier terme du développement d'optique géométrique, on réutilise les idées utilisées dans [3] et [2] que l'on associe aux résultats de [8]. En utilisant une transformation de Fourier, on observe que pour déterminer ce terme, il nous suffit de connaître sa trace en  $\{x_d = 0\}$ . Cette trace est ici donné par une équation comprenant un multiplicateur de Fourier que l'on va devoir inverser contrairement à [3] et [2] qui aboutissent essentiellement à une équation de transport le long du bord. Cela permet de déclencher la construction du développement d'optique géométrique et pour déterminer les termes d'ordre supérieur, on raisonne de façon analogue à ce qu'on a fait pour le premier terme (avec des expressions un peu plus lourdes).

Notons que contrairement aux autres dégénérescences, on ne dispose pas forcément une estimation d'énergie *a priori* générale (et donc à une perte de dérivée minimale) pour une telle dégénérescence. Cela est dû au fait que la construction du symétriseur de Kreiss (qui est l'outil classique pour démontrer des estimations d'énergie *a priori*, voir [6]) est difficile à adapter. Toutefois, notre résultat s'applique en particulier à l'exemple physique de l'équation des ondes avec conditions de bord de Neumann permettant ainsi de montrer que les estimations d'énergie de [5] et [4] sont optimales c'est à dire une perte d'une demi-dérivée à l'intérieur et au bord dans [5] et une perte d'une dérivée sur le bord sans perte à l'intérieur dans [4].

## Références

- [1] M. Artola and A. Majda. Nonlinear geometric optics for hyperbolic mixed problems. In *Analyse mathématique et applications*, pages 319–356. Gauthier-Villars, 1988.
- [2] A. Benoit. Geometric optics expansions for linear hyperbolic boundary value problems and optimality of energy estimates for surface waves. *Differential Integral Equations*, 27(5-6) :531–562, 2014.
- [3] J.-F. Coulombel and O. Guès. Geometric optics expansions with amplification for hyperbolic boundary value problems : linear problems. *Annales de l'Institut Fourier*, 60(6) :2183–2233, December 2010.
- [4] M. Eller. On symmetric hyperbolic boundary problems with nonhomogeneous conservative boundary conditions. *SIAM J. Math. Anal.*, 44(3) :1925–1949, 2012.
- [5] M. Eller. Loss of derivatives for hyperbolic boundary problems with constant coefficients. *Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B*, 23(3) :1347–1361, 2018.
- [6] H.-O. Kreiss. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 23(3) :277–298, 1970.
- [7] M. Sablé-Tougeron. Existence pour un problème de l'élastodynamique Neumann non linéaire en dimension 2. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 101(3) :261–292, (1988).
- [8] M. Williams. Boundary layers and glancing blow-up in nonlinear geometric optics. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 33(3) :383–432, 2000.

## Comportement asymptotique de grandes valeurs propres pour le modèle de Rabi asymétrique à deux photons.

M. Charif, A. BOUTET DE MONVEL, L. ZIELINSKI

*Université du Littoral Côte d'Opale, Université de Paris Diderot Paris 7, Université du Littoral Côte d'Opale*

**Email :** mirnashirif13@gmail.com

**Mots Clés :** Mathématiques Appliquées, opérateurs auto-adjoints non bornés, l'asymptotique des valeurs propres, spectre discret, Modèle quantique de Rabi.

**Biographie** – Actuellement doctorante en cotutelle de thèse entre l'université du Littoral Côte d'Opale ULCO et l'université Libanaise UL. Pendant les 3 années de thèse, j'ai une financement de Février à Juillet de ULCO et de Août à Janvier de UL. Le sujet de ma thèse consiste à étudier le comportement des valeurs propres dans des problèmes de l'optique quantique basés sur le modèle de Rabi.

### Résumé :

Le modèle quantique de Rabi décrit l'interaction la plus simple entre la lumière et la matière. Il s'agit d'un modèle fondamental de l'électrodynamique quantique d'une cavité ou d'un circuit. Il est aussi utilisé pour modéliser les interactions entre la lumière et les ions piégés ou les points quantiques, entre les micro-ondes et les qubits supraconducteurs etc. On réfère à [3] pour une présentation de travaux de recherche récents en relation avec le modèle quantique de Rabi.

L'hamiltonien de Rabi, qui est l'objet central de mes recherches, est donné par un opérateur auto-adjoint agissant dans un espace de Hilbert complexe séparable et est composé de trois termes : un terme qui se réfère à un système quantique à deux niveaux, un terme qui décrit le mode quantique du champ et un terme qui donne le couplage entre l'atome à deux niveaux et le champ. Dans le cadre des systèmes de couplage artificiel et résonateur, l'Hamiltonian contient un terme supplémentaire  $\frac{1}{2}\varepsilon\sigma_x$ , où  $\varepsilon$  est un paramètre réel et  $\sigma_x$  est la matrice de Pauli. Le modèle de Rabi asymétrique à deux photons est une généralisation du modèle de Rabi quantique dans lequel l'interaction est médiée par l'échange de deux photons et le biais statique  $\varepsilon$  n'est pas nécessairement zéro.

Nous prouvons que le spectre de ce modèle se compose de deux suites de valeurs propres  $(E_n^+)_{n=0}^\infty$ ,  $(E_n^-)_{n=0}^\infty$  et nous décrivons leur comportement asymptotique quand  $n$  tend vers l'infini. Notre principal outil est la méthode de quasi-similitude des opérateurs, introduite par G. V. Rozenbljum [2] et développée dans les travaux J. Janas, S. Naboko [1] et E. A. Yanovich (Tur) [4]. Il s'avère que certaines valeurs de  $\varepsilon$  présentent une difficulté supplémentaire due au fait que l'on doit considérer les perturbations de valeurs propres doubles.

## Références

- [1] Jan Janas and Serguei Naboko. Infinite jacobi matrices with unbounded entries : asymptotics of eigenvalues and the transformation operator approach. *SIAM J. Math. Anal.*, 36(2) :643–658 (electronic), 2004.

- [2] G. V. Rozenbljum. Near-similarity of operators and the spectral asymptotic behaviour of pseudodifferential operators on the circle (russian). *Trudy Maskov. Mat. Obshch*, 36 :59–84, 1978.
- [3] Batchelor T. M. Xie Q., Zhong H. and Lee C. The quantum rabi model : solution and dynamics. *J. Phys. A : Math. Theor.*, 50 :113001, 2017.
- [4] E. A. (Tur) Yanovich. Asymptotics of eigenvalues of an energy operator in a problem of quantum physics. *J. Janas, P. Kurasov, A. Laptev, and S. Naboko (eds), Operator Methods in Mathematical Physics OTAMP 2010, Bedlewo, Oper. Theory Adv. Appl.*, 227 :165–177, 2013.

## Statistiques de scan spatiales pour données fonctionnelles multivariées

Camille Frévent, MOHAMED-SALEM AHMED, SOPHIE DABO-NIANG, MICHAËL GENIN

*Université de Lille, Université de Lille*

**Email** : camille.frevent@univ-lille.fr

**Mots Clés** : Clusters spatiaux, données fonctionnelles multivariées, MANOVA, statistiques de scan spatiales, test d'Hotelling, test de Wilcoxon

**Biographie** – Je suis diplômée de l'Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse de l'Information (ENSAI, Rennes) et d'un master 2 en mathématiques fondamentales en partenariat avec l'université de Rennes et l'ENS. Je suis actuellement en 2<sup>e</sup> année de thèse sur les statistiques de scan spatiales sous la supervision de Sophie Dabo-Niang et Michaël Genin.

### Resumé :

Les méthodes de détection de clusters spatiaux ont été longuement étudiées. Le but est de développer des outils capables de détecter l'agrégation de sites qui se comportent différemment.

Les statistiques de scan spatiales permettent de détecter des clusters spatiaux sans information *a priori* quant à leur localisation. Elles ont été principalement proposées par [5] et [3] dans le cas de modèles de Poisson et de Bernoulli. D'autres statistiques de scan ont ensuite été proposées pour d'autres modèles de distribution ([4], [1]).

Aujourd'hui les données sont de plus en plus mesurées en temps continu ou quasi-continu. Cela a conduit au développement de méthodes d'analyse de données fonctionnelles ([6]). Dans le domaine des statistiques de scan spatiales, [2] et [7] ont récemment proposé des méthodes pour données fonctionnelles univariées. Cependant il arrive que plusieurs variables soient conjointement mesurées au cours du temps, ces variables pouvant être de plus corrélées. L'application d'une méthode multivariée sur la moyenne au cours du temps des observations entraînerait une très grande perte d'information. L'approche non paramétrique proposée par [7] peut être adaptée facilement au cadre fonctionnel multivarié, cependant l'approche n'a pas été testée dans ce contexte. De plus aucune méthode paramétrique de statistique de scan spatiale n'existe pour le moment à notre connaissance dans le cas fonctionnel multivarié.

Nous proposons trois nouvelles statistiques de scan spatiales pour détecter des clusters spatiaux de données fonctionnelles multivariées indexées dans l'espace. Les nouvelles approches reposent sur une adaptation de l'analyse multivariée de variance fonctionnelle, un test du  $T^2$  d'Hotelling pointwise et un test de Wilcoxon-Mann-Whitney pour données multivariées.

Une étude de simulation a montré les bonnes performances de ces méthodes par rapport à une adaptation au cadre fonctionnel multivarié de la méthode proposée par [7], notamment dans le cas de clusters présents dans une petite période de temps. Les méthodes sont ensuite utilisées pour chercher des clusters spatiaux de pollution dans le nord de la France.

## Références

- [1] Lionel Cucala, Michaël Genin, Caroline Lanier, and Florent Ocelli. A multivariate gaussian scan statistic for spatial data. *Spatial Statistics*, 21 :66–74, 2017.
- [2] Camille Frévent, Mohamed-Salem Ahmed, Matthieu Marbac, and Michaël Genin. Detecting spatial clusters in functional data : new scan statistic approaches. *Spatial Statistics*, 46 :100550, 2021.
- [3] Martin Kulldorff. A spatial scan statistic. *Communications in Statistics-Theory and methods*, 26(6) :1481–1496, 1997.
- [4] Martin Kulldorff, Lan Huang, and Kevin Konty. A scan statistic for continuous data based on the normal probability model. *International journal of health geographics*, 8(1) :1–9, 2009.
- [5] Martin Kulldorff and Neville Nagarwalla. Spatial disease clusters : detection and inference. *Statistics in medicine*, 14(8) :799–810, 1995.
- [6] JO Ramsay and BW Silverman. *Functional Data Analysis*. Springer Series in Statistics. Springer, 2005.
- [7] Zaineb Smida, Lionel Cucala, Ali Gannoun, and Ghislain Durif. A wilcoxon-mann-whitney spatial scan statistic for functional data. *Computational Statistics & Data Analysis*, 167 :107378, 2022.

# Inverse Problems for Stochastic Neutronics

CORENTIN HOUPERT

CEA & École polytechnique  
corentin.houpert@cea.fr

September 8, 2022

## Abstract

*Fissile matter detection and characterisation are crucial issues; especially in nuclear safety, safeguards, matter comptability, reactivity measurements, sub-critical benchmarks interpretations. In this context, we want to identify a source of fissile matter from neutron measurements.*

*Thus we observe the detection times of the neutrons emitted by the fissile matter and going through the detector, then we compute the moments of the empirical distribution of the number of neutrons detected during a time gate  $T$ .*

*The identification of the source is obtained by the estimation of the following parameters:  $k_{eff}$  the multiplication factor of the system,  $S$  the intensity of the source,  $x$  the proportion of compound Poisson source and  $\varepsilon_F$  the fission efficiency.*

*Given the parameters of the source there are some models that allow us to predict the moments of counted number of neutrons during a time gate  $T$ . During the Manhattan project (1939-1946) R. Feynman established a point model which relates the excess of count number variance to a nuclear parameter of interest. This point model states that monokinetic neutrons move in an infinite, isotropic and homogeneous medium. The method was extended to higher order moments of count number distribution: neutron physicists usually take into account the three first moments (since the fourth moment is really noisy, neutronicians do not use higher order moments).*

*Then, given some observations (i.e. the moments of counted number of neutrons during a time gate  $T$ ) we want to get the parameters of the fissile source. In order to achieve this goal, we will use a Bayesian approach in order to get the a posteriori distribution of the source parameters. The a posteriori distribution is non-trivial and it can be sampled by Markov Chain Monte-Carlo methods with covariance adaptation matrix (MCMC with CMA).*

*Synthetic data can be generated by the neutronic codes MCNP6 or Tripoli-4 in order to test the Bayesian approach.*

## REFERENCES

- [1] I. Pázsit et A. Enqvist *Neutron Fluctuations - A Treatise on the Physics of Branching Processes*, Elsevier Ltd, 2008
- [2] W. Hage & D.M. Cifarelli *Correlation Analysis with Neutron Count Distributions in Randomly or Signal Triggerred Time Intervals for Assay of Special Fissile Material*, Nuclear Science and Engineering 112:2, pages 136-158, 1985
- [3] N. Ensslin, W. C. Harker, M. S. Krick, D. G. Langner, M. M. Pickrell, and J. E. Stewart *Application Guide to Neutron Multiplicity Counting LA-13422-M*, 1998
- [4] L. Breiman *Probability and Stochastic Processes: With a View Toward Applications*, Houghton Mifflin, 1969
- [5] T. J. Sullivan *Introduction to Uncertainty quantification*, Springer, Cham, 2015

A. Darwiche

**Abstract**

Let  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  be a probability space, let  $T$  be a contraction on  $L^p(\mu)$  and let  $f$  in  $L^p(\mu)$ ,  $(p > 1)$ . In this paper, we provide suitable conditions over sequences  $(w_k)$ ,  $(u_k)$  and  $(A_k)$  in such a way that the limit of the weighted ergodic average is  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{A_N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k T^{u_k}(f) = 0$   $\mu$ -a.e.. We also give applications which concretely prove the effectiveness of the obtained theorems. More precisely, we construct sequences  $(w_k)$  and  $(u_k)$  that were difficult to deal with previously, which satisfy the conditions of our theorems.

**Keywords:** weighted ergodic averages, contractions of Hilbert space, one-sided weighted ergodic Hilbert transformation

**AMS Subject Classification:** 37A30, 37A50

## Reconstruction de défauts dans des plaques élastiques en utilisant des fréquences localement résonnantes

Angèle Niclas, ÉRIC BONNETIER, LAURENT SEPPECHER, GRÉGORY VIAL  
*École centrale de Lyon, Université Grenoble Alpes, École centrale de Lyon, École centrale de Lyon*

**Email** : angele.niclas@ec-lyon.fr

**Mots Clés** : Mathématiques Appliquées, Problèmes inverses, Propagation des ondes, Résonances, Analyse asymptotique

**Biographie** – Après avoir suivi un parcours orienté vers les EDP, j’ai effectué et soutenu ma thèse à l’École Centrale de Lyon sur la modélisation mathématique et numérique de problèmes inverses en guide d’onde. Les problèmes que j’étudie sont en interaction forte avec les expériences physiques, et j’ai en particulier beaucoup travaillé avec l’Institut Langevin. Je m’intéresse maintenant à des problèmes inverses en sismologie lors de mon post-doc à l’École Polytechnique.

### Resumé :

La reconstruction de défauts dans les guides d’ondes est un enjeu important du contrôle non destructif des structures. Nos travaux se basent sur des expériences menées à l’Institut Langevin dans le but de reconstruire des défauts d’épaisseur dans différentes plaques en utilisant des sources multifréquencielles [1]. Contrairement aux méthodes usuelles de back-scattering qui évitent les fréquences de coupures de la plaque, la méthode que nous avons développée les utilise pour reconstruire avec une très grande précision les variations lentes d’épaisseur.

Dans une plaque élastique de hauteur lentement variable, le champ de déplacement élastique peut se décomposer en une somme d’ondes, dites de Lamb [4]. Nous avons montré que chaque coefficient de cette décomposition est solution d’une EDP de dimension 1 très proche de l’équation de Schrödinger. En utilisant les travaux de physique quantique sur l’effet tunnel, nous avons pu approcher très précisément le comportement des ondes près des fréquences localement résonnantes de la plaque [2], comme représenté en Figure 1.

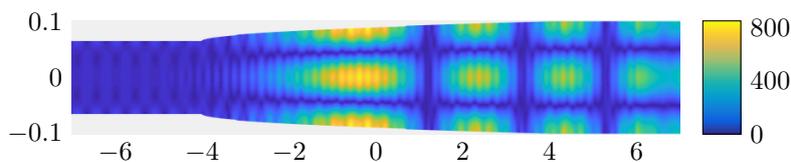


FIGURE 1 – Représentation de  $|u_1|$  à une fréquence localement résonnante dans un guide d’onde élastique de hauteur variable.

En utilisant la forme très particulière de ces ondes, nous avons développé un algorithme permettant de reconstruire la hauteur d’une plaque en utilisant les mesures des ondes à sa surface pour différentes fréquences localement résonnantes [3]. Nous présenterons le calcul de l’erreur commise par notre algorithme, et les différentes reconstructions de la hauteur de la plaque obtenues pour une implémentation de l’algorithme sur des données générées par éléments finis (voir Figure ??).

Nous comparerons également ces reconstructions avec la littérature existante, et montrerons que dans le cas de défauts lentement variables, la précision et le temps de calcul sont améliorés. Ce cadre théorique simule très bien les expériences menées à l’Institut Langevin [1], et devrait permettre très prochainement des tests sur données réelles.



FIGURE 2 – Deux reconstructions de défauts de hauteur. En noir, on représente la forme initiale du guide et en rouge, la reconstruction légèrement décalée pour améliorer la comparaison.

## Références

- [1] O. Balogun, T. W. Murray, and C. Prada. Simulation and measurement of the optical excitation of the  $s_1$  zgv lamb wave resonance in plates. *Journal of Applied Physics*, 102(6) :064914, 2007.
- [2] E. Bonnetier, A. Niclas, L. Seppecher, and G. Vial. The helmholtz problem in slowly varying waveguides at locally resonant frequencies. *submitted*, 2022.
- [3] A. Niclas and L. Seppecher. Reconstruction of smooth shape defects in waveguides using locally resonant frequencies. *submitted*, 2022.
- [4] V. Pagneux and A. Maurel. Lamb wave propagation in elastic waveguides with variable thickness. *Proceedings of the Royal Society A*, 462(2068) :1315–1339, 2006.

## Quelques problèmes d’optimisations pour les stellarators

**R. Robin,**  
*Sorbonne Université,*

**Email :** remi.robin@inria.fr

**Mots Clés :** Optimisation, Optimisation de forme, Électromagnétisme, Fusion nucléaire, stellarator

**Biographie** – Rémi Robin vient de finir sa dernière année de thèse au Laboratoire Jacques-Louis Lions à Sorbonne Université sous la direction d’Ugo Boscain et Mario Sigalotti. Les travaux présentés ont été effectués dans le cadre de l’action exploratoire Inria StellaCage, regroupant l’équipe Inria CAGE, Yannick Privat et la start-up Renaissance Fusion.

### Resumé :

Dans cette présentation, nous étudierons des problèmes liés au confinement magnétique d’un plasma dans le cadre de la réalisation d’un réacteur à fusion nucléaire de type stellarator.

Nous commencerons par présenter le contexte physique et les motivations industrielles sous-jacentes à l’élaboration de ce type de réacteur. Nous proposerons ensuite une introduction à un problème inverse relié à l’optimisation de la forme des bobines du stellarator. Nous montrerons comment ce problème est classiquement relaxé en un problème de détermination de densité de courant optimale sur une surface toroidal (voir [1]).

Nous étudierons ensuite une première extension de ce problème d’optimisation prenant en compte les forces de Laplace [4]. Les motivations de ces travaux proviennent des contraintes importantes sur les matériaux qu’il est nécessaire de réduire afin de compactifier les dispositifs. D’un point de vue mathématique, nous verrons que la question d’une bonne définition de ces forces est non triviale. Nous illustrerons numériquement les résultats théoriques.

Nous présenterons ensuite nos résultats théoriques et numériques sur un problème d’optimisation de forme relié à cette question de conception optimale de bobines [3]. Si le temps nous le permet, nous aborderons enfin des questions d’existences de formes optimales pour ce problème et des généralisations sous une contrainte dite de Reach uniforme [2].

## Références

- [1] P. Merkel. An integral equation technique for the exterior and interior neumann problem in toroidal regions. *Journal of Computational Physics*, 66(1) :83–98, 1986.
- [2] Yannick Privat, Rémi Robin, and Mario Sigalotti. Existence of surfaces optimizing geometric and PDE shape functionals under reach constraint, 2022. arXiv :2206.04357 [math].
- [3] Yannick Privat, Rémi Robin, and Mario Sigalotti. Optimal shape of stellarators for magnetic confinement fusion. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 163 :231–264, July 2022.
- [4] Rémi Robin and Francesco A. Volpe. Minimization of magnetic forces on stellarator coils. *Nuclear Fusion*, 62(8) :086041, June 2022. Publisher : IOP Publishing.

## Analyse de la convergence de certaines méthodes d'inversion multi-étapes de type one-shot

T. Vu, M. BONAZZOLI, H. HADDAR  
INRIA and École Polytechnique (EDMH), INRIA, équipe projet IDEFIX, UMA,  
ENSTA Paris

**Email** : tuan-anh.vu@polytechnique.edu

**Mots Clés** : problèmes inverses, méthodes de type one-shot, analyse de convergence, identification de paramètres

**Biographie** – Après avoir obtenu mon M2 de mathématiques appliquées à Sorbonne Université, en octobre 2020 j'ai commencé un doctorat à l'École Polytechnique grâce à une allocation ministérielle MESRI de l'EDMH. Ce travail est réalisé dans le cadre de mes première et deuxième années de thèse sur les méthodes d'inversion de type one-shot, sous la direction de H. Haddar et M. Bonazzoli.

### Resumé :

Notre objectif principal est d'analyser la convergence de la méthode de descente de gradient pour résoudre des problèmes inverses contraints par des équations aux dérivées partielles où le problème direct correspondant est résolu itérativement. En particulier, nous considérons le cas où les itérations internes sont incomplètes, c'est-à-dire arrêtées avant d'atteindre la convergence. Des méthodes de type one-shot, qui itèrent en même temps sur la solution du problème direct et sur l'inconnue du problème inverse, ont été étudiées dans la littérature d'optimisation, où la convexité forte est généralement admise pour assurer la convergence. Dans le cadre des problèmes inverses, ces hypothèses ne sont pas vérifiées en général.

Avant de s'attaquer à un problème inverse non linéaire de type estimation de paramètres dans des EDPs, nous nous sommes intéressés dans un premier temps à une version linéarisée de ces problèmes. La version discrétisée du problème direct associé (qui peut être obtenue par exemple par discrétisation par éléments finis d'une EDP) est de la forme:

$$u = Bu + M\sigma + F,$$

où  $u \equiv u(\sigma) \in \mathbb{R}^{n_u}$  est la variable d'état,  $\sigma \in \mathbb{R}^{n_\sigma}$  est le paramètre d'intérêt pour le problème inverse et  $B \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n_u \times n_\sigma}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n_u}$  sont des matrices connues relatives au modèle physique. Lorsque  $\sigma$  est donné, on suppose que l'on résout le problème direct par itérations de point fixe

$$u_{\ell+1} = Bu_\ell + M\sigma + F, \quad \ell = 0, 1, \dots \quad (1)$$

et que cette suite converge à partir de toute donnée initiale  $u_0$ , ce qui est équivalent à supposer que le rayon spectral de  $B$  est inférieur à 1 [1]. Nous mesurons  $Hu(\sigma) = f$ , où  $H \in \mathbb{R}^{n_f \times n_u}$ , et nous posons le problème inverse qui consiste à trouver  $\sigma$  à partir de  $f$ . Garantir l'unicité du problème inverse revient à supposer que la matrice  $H(I - B)^{-1}M$  est injective. De plus, les espaces de Hilbert  $\mathbb{R}^{n_u}, \mathbb{R}^{n_\sigma}, \mathbb{R}^{n_f}$  sont équipés de produits scalaires arbitraires.

Nous résolvons le problème inverse par la méthode de descente de gradient appliquée à une formulation de moindres carrés. Soit  $\sigma^{\text{ex}}$  la solution exacte du problème inverse et  $f = Hu(\sigma^{\text{ex}})$ . Le problème s'écrit de manière équivalente comme

$$\sigma^{\text{ex}} = \operatorname{argmin}_{\sigma \in \mathbb{R}^{n_\sigma}} J(\sigma) \quad \text{avec } J(\sigma) := \frac{1}{2} \|Hu(\sigma) - f\|^2.$$

En utilisant la technique de l'état adjoint, nous introduisons  $p(\sigma)$ , solution de

$$p = B^*p + H^*(Hu - f),$$

de manière à ce que

$$\nabla J(\sigma) = M^*p(\sigma),$$

où  $B^*, H^*$  et  $M^*$  sont les opérateurs adjoints de  $B, H$  et  $M$  respectivement. L'algorithme de descente de gradient usuel et l'algorithme de descente de gradient décentré à pas fixe  $\tau > 0$  s'écrivent alors

$$\begin{cases} \sigma^{n+1} = \sigma^n - \tau M^* p^n, \\ u^n = Bu^n + M\sigma^n + F, \\ p^n = B^*p^n + H^*(Hu^n - f) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma^{n+1} = \sigma^n - \tau M^* p^n, \\ u^{n+1} = Bu^{n+1} + M\sigma^n + F, \\ p^{n+1} = B^*p^{n+1} + H^*(Hu^{n+1} - f). \end{cases} \quad (2)$$

Ces algorithmes convergent lorsque  $\tau$  est suffisamment petit et dans le cas particulier où  $\|B\| < 1$  on peut prendre

$$\tau < \frac{2(1 - \|B\|)^2}{\|H\|^2 \|M\|^2} \quad \text{et} \quad \tau < \frac{(1 - \|B\|)^2}{\|H\|^2 \|M\|^2}.$$

Ici les problèmes pour  $u^n$  et  $p^n$  sont résolus de manière exacte. Lorsque ces problèmes directs et adjoints sont résolus de manière itérative comme dans (1), il est possible d'envisager d'itérer en même temps sur l'inconnue du problème inverse et ceci est le principe des méthodes de type one-shot. Nous nous intéressons à deux variantes principales dites multi-étapes de type one-shot où à une itération sur  $\sigma$  on associe  $k$  itérations sur l'état et l'état adjoint:

$$\begin{cases} \sigma^{n+1} = \sigma^n - \tau M^* p^n, \\ u_0^{n+1} = u^n, p_0^{n+1} = p^n, \\ \left| \begin{array}{l} u_{\ell+1}^{n+1} = Bu_{\ell+1}^{n+1} + M\sigma^{n+1} + F, \\ p_{\ell+1}^{n+1} = B^*p_{\ell+1}^{n+1} + H^*(Hu_{\ell+1}^{n+1} - f), \end{array} \right. \\ u^{n+1} = u_k^{n+1}, p^{n+1} = p_k^{n+1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sigma^{n+1} = \sigma^n - \tau M^* p^n, \\ u_0^{n+1} = u^n, p_0^{n+1} = p^n, \\ \left| \begin{array}{l} u_{\ell+1}^{n+1} = Bu_{\ell+1}^{n+1} + M\sigma^n + F, \\ p_{\ell+1}^{n+1} = B^*p_{\ell+1}^{n+1} + H^*(Hu_{\ell+1}^{n+1} - f), \end{array} \right. \\ u^{n+1} = u_k^{n+1}, p^{n+1} = p_k^{n+1}. \end{cases} \quad (3)$$

Il est facile de voir que lorsque  $k \rightarrow \infty$  le premier schéma dans (3) donne formellement le schéma de descente de gradient usuel alors que le deuxième donne une descente de gradient décentrée (2). Ces schémas convergent pour  $\tau$  suffisamment petit en étudiant les valeurs propres des matrices d'itération. Pour le deuxième schéma avec  $k = 1$  seulement le spectre réel avait été étudié dans [2]. Nous étudierons d'abord la convergence de ces schémas et quantifierons la valeur maximale du pas de descente en fonction de  $k$  dans le cas scalaire. On montre en particulier que pour chaque schéma, la valeur de  $\tau$  maximale converge lorsque  $k \rightarrow \infty$  vers la valeur de  $\tau$  maximale pour la descente de gradient correspondante (2). Dans le cas général, nous établirons des conditions nécessaires sur  $\tau$  pour la convergence des schémas dans (3) et en particulier lorsque  $\|B\| < 1$ , ces conditions sont respectivement de la forme:

$$\tau < \frac{\psi(k, \|B\|)}{\|H\|^2 \|M\|^2} \quad \text{et} \quad \tau < \frac{\chi(k, \|B\|)}{\|H\|^2 \|M\|^2},$$

où  $\psi$  et  $\chi$  sont des fonctions explicites. Nous illustrerons enfin ces résultats par des tests numériques sur un problème inverse faisant intervenir par l'équation de Helmholtz.

## Références

- [1] Greenbaum A. *Iterative Methods for Solving Linear Systems*. Frontiers in Applied Mathematics, 1997.
- [2] Griewank A. Projected Hessians for Preconditioning in One-Step One-shot Design Optimization. *G. Di Pillo and M. Roma, Large-Scale Nonlinear Optimization*, pages 151–171, 2006.

## Algèbres de Hopf dendriformes et tridendriformes

Pierre Catoire,  
LMPA , Université du Littoral Côte d'Opale,

Email : pierre.catoire@univ-littoral.fr

Mots Clés : Algèbre de Hopfs, dendriforme, tridendriforme, arbre

**Biographie** – J'ai fait une licence mathématique et un master 1 recherche à l'ULCO. Puis, j'ai fait deux masters à l'université de Lille. Le premier préparant à l'agrégation que j'ai obtenu en 2020 et le second orienté recherche. Je fais actuellement une thèse intitulée "Algèbres de Hopf combinatoires et applications aux probabilités libres" à l'ULCO au sein du LMPA.

### Resumé :

Dans le poster, je vais introduire les fondamentaux de la théorie des algèbres de Hopf et deux exemples d'algèbres de Hopf appelées dendriformes et tridendriformes. Cette théorie possède des applications en physique quantique grâce à certaines personnes notamment D.Kreimer. Une algèbre de Hopf est une algèbre muni d'un coproduit vérifiant les propriétés de coassociativité, de counité et quelques compatibilités supplémentaires : le coproduit est un morphisme d'algèbre et un antipode existe. Nous nous limiterons exclusivement aux cas gradués que je détaillerai dans le poster. Il faut penser le coproduit  $\Delta$  comme une opération qui brise les éléments en deux morceaux. Puis, avec ces morceaux nous sommes capables de reconstituer l'élément de départ. Enfin, les cas dendriformes et tridendriformes sont des algèbres de Hopf vérifiant que le produit peut être écrit comme la somme de deux ou trois sous-produits satisfaisant compatibilités entre eux et avec  $\Delta$ . Nous interpréterons ces algèbres en terme d'arbres et de forêts avec des descriptions combinatoires des produits et coproduit. Tout ce travail, utilise une partie des travaux de [5],[4],[2],[3] et [1].

### Références

- [1] Pierre Catoire. Tridendriform structures. to be published., 2022.
- [2] Loïc Foissy. Algèbres de Hopf combinatoires. available at <http://loic.foissy.free.fr/pageperso/Hopf.pdf>.
- [3] Loïc Foissy. Bidendriform bialgebras, trees, and free quasi-symmetric functions. *J. Pure Appl. Algebra*, 209(2) :439–459, 2007.
- [4] Jean-Louis Loday and María Ronco. Trialgebras and families of polytopes. In *Homotopy theory : relations with algebraic geometry, group cohomology, and algebraic K-theory. Papers from the international conference on algebraic topology, Northwestern University, Evanston, IL, USA, March 24–28, 2002*, pages 369–398. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2004.
- [5] Jean-Louis Loday and María O. Ronco. Hopf algebra of the planar binary trees. *Adv. Math.*, 139(2) :293–309, 1998.

## Le théorème des nombres premiers

Vincent Gozé,  
Université du Littoral Côte d'Opale, Calais,

**Email** : vincent.goze@univ-littoral.fr

**Mots Clés** : Théorie analytique des nombres, nombres premiers

**Biographie** – Ayant effectué mon Master Mathématiques et obtenu l'agrégation à Calais, j'ai souhaité découvrir le monde de la recherche en y effectuant une thèse en théorie analytique des nombres, plus précisément sur le théorème des nombres premiers et son approche par les méthodes d'analyse réelle. Ma thèse est financée par l'ANR ArithRand.

### Resumé :

Le théorème des nombres premiers (TNP), qui évalue la proportion de nombres premiers plus petits qu'une borne donnée est un résultat fondateur de la théorie analytique des nombres. La démonstration en 1896 produite indépendamment par Hadamard et La Vallée Poussin repose notamment sur l'idée de Riemann de relier l'étude des nombres premiers à l'étude de la fonction zêta prolongée au plan complexe. La qualité du terme d'erreur dans le TNP est dans ce cadre directement dépendante de la connaissance d'une région sans zéros de la fonction zêta. La meilleure région sans zéros connue à ce jour est due à Vinogradov et Korobov ; elle date de 1958. En 1949, Erdős [2] et Selberg [5] ont obtenu une preuve dite "élémentaire" du TNP, i.e reposant uniquement sur les techniques de l'analyse réelle. Leurs idées ont par la suite été approfondies et ont permis d'obtenir des estimations du terme d'erreur, qui restent à ce jour moins précises que celles obtenues par les voies de l'analyse complexe. Néanmoins en 1999, Wen Chao Lu [3] a poussé ces techniques jusqu'à obtenir un terme d'erreur très proche de ce qu'obtenait la Vallée Poussin.

Ma thèse a pour objet l'estimation du terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers à l'aide des méthodes d'analyse réelle, elle vise à améliorer le résultat final de Wen Chao Lu et à déterminer les limites de sa méthode.

Dans ce poster, je présente le développement historique de la démonstration du théorème des nombres premiers, puis j'expose les éléments clés de la démonstration par l'analyse complexe, puis par l'analyse réelle.

## Références

- [1] M. Balazard. *Le théorème des nombres premiers*. Nano. Calvage & Mounet, 2016.
- [2] P. Erdős. On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 35(7) :374–384, 1949.
- [3] Wen Chao Lu. On the elementary proof of the prime number theorem with a remainder term. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 29(3) :979–1053, 1999.
- [4] Hugh L. Montgomery and Robert C. Vaughan. *Multiplicative Number Theory I : Classical Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2006.
- [5] Atle Selberg. An elementary proof of the prime-number theorem. *Annals of Mathematics*, 50 :305, 1949.
- [6] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres : Cours et exercices*. Dunod, 2022.

## Application du processus KDD dans une démarche d'amélioration de la qualité de vie au travail

E. MAUDUIT, A. SIMONETTO, M. BRUYEN

ENSTA Paris (EDMH) et Greenworking, ENSTA Paris (UMA), Greenworking

**Email** : eliabelle.mauduit@ensta-paris.fr

**Mots Clés** : Knowledge Discovery Databases (KDD), Data Mining, Optimization, Machine Learning, Cognitive Sciences

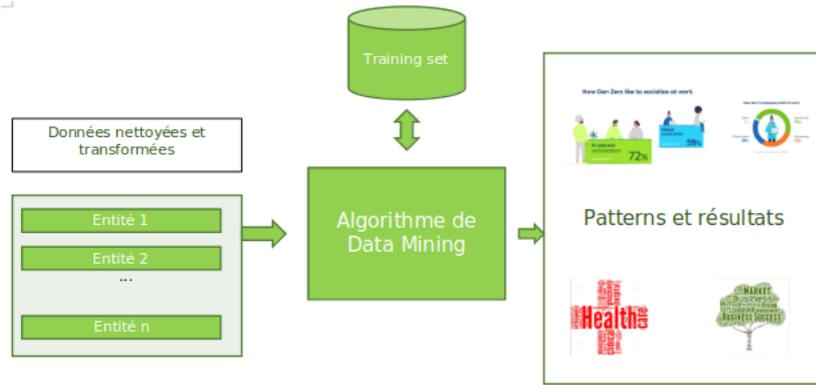
**Biographie** – Après avoir obtenu mon diplôme d'ingénieure en Mathématiques Appliquées à l'ENSTA Paris en parallèle d'un master en Mathématiques pour les Sciences du Vivant à l'école Polytechnique, j'ai entamé une thèse CIFRE au sein de l'EDMH en collaboration avec Greenworking, un cabinet de conseil spécialisé dans l'innovation managériale. J'essaye d'appliquer des techniques d'analyse de textes en vue d'automatiser l'étude des nuages de mots collectés par Greenworking auprès de salariés de nombreuses entreprises. Ce travail s'inscrit dans une démarche d'amélioration de la qualité de vie au travail et de bien être des collaborateurs.

### Resumé :

La collecte et l'analyse de données quantitatives et qualitatives constituent un enjeu majeur de notre société, notamment dans le monde de l'entreprise où écoute et bien-être du salarié riment avec productivité. De nombreux outils de sondages et enquêtes se sont développés et sont aujourd'hui utilisés par la majorité des grands groupes et filiales. Parmi ces outils, nous pouvons citer GPulse<sup>®</sup> [1], mis en place par l'équipe de développeurs de Greenworking dont fait partie Mathieu Bruyen, mon co-encadrant au sein de l'entreprise.

Les enquêtes proposées par GPulse<sup>®</sup> se présentent sous la forme d'un questionnaire développé par des psychologues mixant questions fermées (appelant à des réponses de type oui/non, ou quantification d'un facteur sur une échelle numérique par exemple) et ouvertes (appelant à une argumentation sous forme de nuages de mots ou *verbatim*). L'analyse automatique des réponses aux questions fermées est relativement simple car il s'agit de résultats quantitatifs et objectifs. L'interprétation algorithmique des *verbatim* est quant à elle bien plus compliquée à mettre en place. De nombreuses sources d'ambiguïté sont susceptibles d'induire des erreurs d'analyse. Citons à titre d'exemple les fautes d'orthographe, les nuances dans les réponses, l'ironie voire les contresens. Jusqu'à aujourd'hui, ces nuages de mots étaient interprétés par des consultants de Greenworking. Ce travail fastidieux et chronophage (des dizaines de milliers de *verbatim* à analyser chaque année) génère inévitablement des erreurs. Cependant, abandonner totalement l'analyse des nuages de mots n'est pas une solution envisageable, car ils apportent de précieuses informations qui complètent celles recueillies grâce aux questions fermées.

Afin d'analyser ces textes, nous avons décidé de nous concentrer sur les algorithmes de KDD (Knowledge Discovery Databases) qui permettent d'extraire des informations utiles à partir de grandes bases de données textuelles [4]. L'étape la plus importante de ce processus est celle du Data Mining, qui consiste en l'extraction concrète d'informations, l'identification de patterns, etc.



Actuellement, nous travaillons sur les étapes de pré-traitement des données. Premièrement, il est nécessaire de nettoyer les textes pour se débarrasser des bruits parasites pouvant perturber l'algorithme de Data Mining. Pour cela, il faut supprimer les accents, les signes de ponctuation, les mots à faible valeur sémantique (ou *stopwords*), etc. Ensuite, nous regroupons les mots ayant la même racine (parfait, parfaite, parfaitement → **parfait**) grâce à un algorithme de stemming. Enfin, à partir de ces données préalablement nettoyées, nous créons des clusters sémantiques. Pour cela, nous nous inspirons de l'algorithme de clustering TBSec présenté dans l'article [3], et plus précisément de la fonction de similarité sémantique entre le texte  $s$  et le cluster  $c$  qui nous y est présentée :

$$f_{scs}(s, c) = \frac{1}{\|s\|} \sum_{w \in s} \frac{(sem(w, c).t(w))(k_1 + 1)}{(sem(w, c).t(w)) + k_1} \quad (1)$$

où

$$sem(w, c) = \begin{cases} f_{sem}(w, c) & \text{si } f_{sem}(w, c) \geq sem_{th} \\ & \text{and } sem_{sq} = \text{False} \\ f_{sem}(w, c)^2 & \text{si } f_{sem}(w, c) \geq sem_{th} \\ & \text{and } sem_{sq} = \text{True} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'algorithme possède de nombreux paramètres d'entrée ( $k$  : nombre de termes à incorporer aux clusters,  $t$  : seuil d'acceptation normalisé, ainsi que tous ceux qui figurent dans la fonction  $f_{scs}$ ). Nous avons pour objectif de construire un modèle d'optimisation afin de trouver les combinaisons de valeurs des paramètres qui renvoient les meilleurs résultats aux tests de précision.

En parallèle, nous travaillons sur la forme des questions afin de garantir la qualité des données récoltées. Des questions exclusivement fermées induisent une baisse de l'engagement de la part des répondants, favorisant le phénomène de *careless responding* [2]. En effet, ce type de questionnaire n'appelle pas à une réflexion profonde et les salariés ont tendance à y répondre rapidement. D'un autre côté, des questions ouvertes trop larges peuvent entraîner un fort taux d'abstention, les répondants ne trouvant pas de temps à y consacrer. Nous avons donc décidé d'employer des questions "semi-ouvertes". Ces questions peuvent prendre plusieurs formes :

- Liste d'adjectifs : Citez deux à cinq adjectifs qualifiant votre état d'esprit général lorsque vous arrivez sur votre lieu de travail
- Textes à trous
- Réponses succinctes sur un point en particulier (sous forme de tweets, hashtags)

Nous comptons rapidement tester ce nouveau type de question auprès d'un grand client de Greenworking. Nous espérons observer une hausse de l'engagement par rapport aux enquêtes des années précédentes, ainsi que l'ajout spontané de nouveaux facteurs de la part des répondants.

## Références

- [1] <https://www.gpulse.fr/>.

- [2] Meyer John Kam Chester. How careless responding and acquiescence response bias can influence construct dimensionality. *Organizational Research Methods*, (2015), 512-541, 18(3), 2015.
- [3] Zervanou K Zhang Y Paalman J, Mullick S. Term based semantic clusters for very short text classification. *Proceedings - Natural Language Processing in a Deep Learning World*, 2019.
- [4] Rohit S. Kdd process in data mining : What you need to know ? 2020.

## Poster : Hooley's function along friable integers

**J. Wetzer,**  
*Université du Littoral Côte d'Opale,*

**Email :** julie.wetzer@univ-littoral.fr

**Mots Clés :** Friable integers, Hooley's function

**Biographie** – Après avoir obtenu l'agrégation à l'université de Strasbourg où j'ai fait mes études supérieures, j'ai suivi un Master 2 recherche à l'université de Rennes avant de me tourner vers une thèse en théorie analytique des nombres à Calais. Ma thèse s'intitule "Fonction de Hooley le long des entiers friables".

### **Resumé :**

For over four decades, the theory of friable integers (i.e integers without large prime factors) has been playing a key role in analytic number theory, with, in particular, applications to Riemann hypothesis, Waring's problem, circle's method, cryptology, algorithmic, summation theory, etc. Furthermore, the Hooley Delta function, introduced by Erdős in 1974 with one of his famous conjectures and which measures the concentration of divisors of an integer, is also a key-concept, useful in Waring type problems, diophantine approximation, distribution of prime factors in polynomial sequences, etc. Whereas satisfactory estimates on the structure of friable integers have been achieved throughout the years, the Delta function remains quite mysterious : neither its normal order, nor its average order are known with the accuracy that is expected in the light of the standard results of the theory of arithmetic functions. This function has been raising curiosity among the international arithmetic community. Some recent works put emphasis on the specific features of the multiplicative structure of friable integers, and it seems that we now have at disposal all technical and conceptual tools to describe the behaviour of the Delta Hooley function along the set of friable integers. The project consists in implementing these tools to provide as much information as possible on the normal and average friable order of the Delta function.

Vendredi 23 septembre

**Conférence plénière – 9h30**

- Nina Aguillon, *La quantification de la diffusion numérique et les schémas de transport anti-diffusifs*
- 

**Session Équations aux dérivées partielles appliquées à la physique 2 – 11h00**

- José Galaz, *Coupling nearshore wave models using Schwarz schemes*
- Théo Belin, *An asymptotic strict comparison principle for the Stefan problem*
- Ayoub Harrat, *Problème de moments pour les mesures discrètes*

**Session Optimisation – 11h00**

- Augustin Cosse, *Titre à préciser*
- Asmaa Khouia, *La méthode LSQR pour résoudre un problème des moindres carrés tensoriels*
- Hamine Hamadi, *A data-driven Krylov model order reduction for large-scale dynamical systems*

## Coupling nearshore wave models using Schwarz schemes

J. Galaz, M. KAZOLEA, A. ROUSSEAU

INRIA, teams LEMON and CARDAMOM, INRIA Cardamom, INRIA Lemon

**Email** : jose.galaz@inria.fr

**Mots Clés** : model coupling, shallow water, domain decomposition, absorbing operators

**Biographie** – José has worked in the intersection between applied mathematics, hydraulic engineering, software engineering and also science outreach. He has developed the Browni open-source simulation library ( [github.com/jgalazm/browni](https://github.com/jgalazm/browni)) currently used in the interactive tsunami simulator TsunamiLab ([tsunamilab.cl](https://tsunamilab.cl)) that is deployed in the Terra-Numerica ([terra-numerica.org](https://terra-numerica.org)) science museum. As a PhD student he is working from Montpellier for INRIA in the LEMON and CARDAMOM teams, and he is also associated to the IMAG laboratory of the University of Montpellier. This PhD is funded by the SURF Inria Challenge.

### Resumé :

When water waves propagate towards the coast, they increase in amplitude and decrease in length in a process called shoaling, until they become unstable and break. This process restarts until the water floods previously dry areas : the run-up. A natural starting point for the mathematical modeling of these phenomena are the Euler equations for an incompressible non-viscous fluid and irrotational flow with free-surface. However, the solution of these equations is very complex and expensive for real applications, due to the three-dimensionality of the problem and the fact that the region occupied by the fluid also varies in time [3].

An approach that has been very effective consists in using vertically averaged equations that allow getting rid of the vertical dimension of the problem. These models are asymptotic approximations of the free-surface Euler equations, and their accuracy is controlled by the length  $L$  and amplitude  $a_{surf}$  of the waves as well as the size of the variation in bathymetry  $a_{bat}$  with respect to a characteristic water depth  $H$  through the parameters  $\mu = L/H$ ,  $\varepsilon = a_{surf}/H$ , and  $\beta = a_{bat}/H$  parameters (see Fig. 1).

In general, shorter wavelengths, larger amplitudes, or larger variations in bathymetry carry higher computational cost and mathematical complexity. However, for real applications, ignoring these features can lead to important prediction errors. This leads to use more expensive models in geographical areas where physical knowledge tells us that it is not necessary. Is it possible to design a more efficient model? One solution consists of spatially distributing each asymptotic model according to the complexity of the problem and designing good interfaces where they can exchange information : in this work this is what we mean by model coupling.

But, supposing that we have coupled two asymptotic models, how will we know if the coupling was successful? From a mathematical point of view, we could observe the ratio between precision and efficiency of the coupled model versus using the most complex model in the entire domain. However, this approach is only valid far from the run-up and only up to the moment when the waves break : the mathematical justification of the equations up to now has only been proved assuming that there exists  $h_{min}$  such that  $h > h_{min} > 0$ ; and up to an  $O(1/\varepsilon)$  or  $O(1/\beta)$  timescale [3]. This limitation rules out this approach for the study of wave breaking and run-up.

Another more practical approach that avoids this problem is to compare accuracy against physical measurements, during wave breaking and run-up. This has already been explored for example in the coupling of the nonlinear shallow water equations with the Nwogu and Green-Naghdi equations,

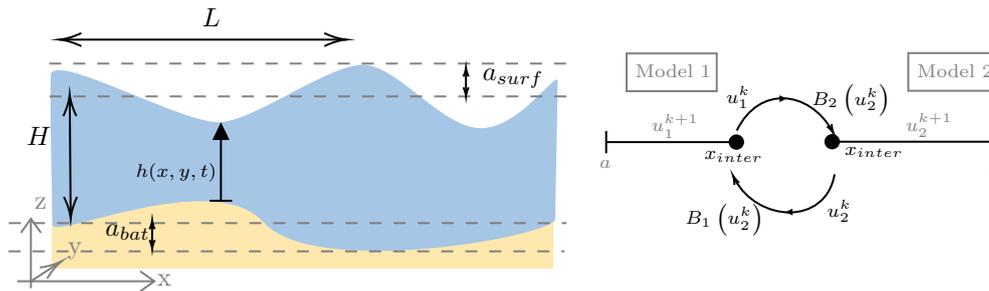


FIGURE 1 – Depiction of problem variables and scales (left) and Schwarz algorithms (right)

the so-called hybrid model [2]. However, without the addition of dissipative terms of physical or numerical origin, this approach has been shown to be unstable when refining the numerical mesh.

Now, how can we exchange the information between the models? One method that is simple and can be effective is the Schwarz method (Fig. 1, right). This method seeks to solve each equation independently and iteratively, using the solution of the adjacent model in the previous iteration as information in the interface, transformed by some operator to be designed. An important property is that if the interface processes this information using an absorbing operator (the same one used to let waves out of the domain without being reflected) then the iterative process can be stopped at an optimal number of iterations, though, often these absorbing operators are very costly and complex [1].

In this work we discuss different types of operators (absorbing, asymptotic, and Dirichlet / Neumann) that can be used in a Schwarz scheme to couple two linear asymptotic models that assume that the amplitude of the waves is very small. We examine their precision assuming  $h > h_{min}$ , discuss their properties and propose perspectives for the case when  $h \rightarrow 0$  in parts of the domain.

## Références

- [1] C Japhet and F Nataf. The best interface conditions for domain decomposition methods : Absorbing boundary conditions, 2003. *Artificial Boundary Conditions, with Applications to Computational Fluid Dynamics Problems* edited by L. Tourrette, Nova Science.
- [2] Maria Kazolea and Mario Ricchiuto. On wave breaking for boussinesq-type models. *Ocean Modelling*, 123 :16–39, 2018.
- [3] David Lannes. *The water waves problem : mathematical analysis and asymptotics*, volume 188. American Mathematical Soc., 2013.

## An asymptotic strict comparison principle for the Stefan problem.

T. Belin, T. BELIN, P.LAFITTE  
CentraleSupélec,

**Email** : theo.belin@centralesupelec.fr

**Mots Clés** : Free boundary problems, Comparison principle, Viscosity solutions, Long-time behaviour.

**Biographie** – En première année de thèse après une formation d'ingénieur orientée vers la recherche à CentraleSupélec, je m'intéresse à la résolution théorique et numérique de problèmes paraboliques dégénérés. J'ai eu l'occasion de travailler sur ces sujets dès ma première année en école d'ingénieur puis d'obtenir le financement d'une thèse académique sous la direction du Pr. Pauline Lafitte. Ma thèse est associée à une mission d'enseignement dans le cursus de CentraleSupélec, dans les cours d'Analyse, de Probabilités et d'EDP.

### Resumé :

Free boundary problems, such as the Stefan problem, constitute a class of non-linear problems modelling the interaction between two heterogeneous phases. Typically the Stefan problem models the melting and the freezing of water without convection. Free boundary problems are known to generate challenging geometrical evolutions : topological changes, formation of singularities in finite time, etc. A way to tackle these problems is via viscosity solutions. First developed by Oskar Perron in 1923 [5], they became very popular in the 1990 for solving non-linear PDEs and degenerate problems [3]. These include successful treatments of the mean curvature flow, the Stefan problem [1], and more generally of Hamilton-Jacobi equations. The viscosity solution theory relies on so-called *comparison principles*, which aim to extend an inequality between sub and supersolutions from the boundary to the whole domain. They are the generalisations of well-known maximum principles for elliptic and parabolic equations, and are the foundation to the well-posedness in the viscosity sense.

In this talk, we will present a strict comparison principle for viscosity solutions to the Stefan problem, which refines an already existing result by Kim and Pozar [4]. We show that the spatial distance between the free boundaries of two solutions, starting respectively at *strictly separated* data, must be bounded from below by some  $\delta > 0$  for all times. This result took inspiration from the paper of Cardaliaguet in 2001 [2] which shows a similar strict comparison for a Hele-Shaw problem.

To make this statement precise, let us denote by  $u$  the temperature of the media. The liquid part of the material is  $\mathcal{T}(u) := \{u > 0\} \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  and its free boundary is the melting/freezing interface  $\Gamma(u) = \partial_s \mathcal{T}(u) := \bigcup_{t \geq 0} \{t\} \times \partial[\mathcal{T}(u)(t)]$ . The two-phase Stefan problem reads for  $u$ ,

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } \mathcal{T}(u) \cup [(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) \setminus \overline{\mathcal{T}(u)}] \\ \frac{\partial_t u}{|\nabla_x u|} = |\nabla_x u^+| - |\nabla_x u^-| & \text{on } \Gamma(u) \\ u(0, \cdot) = u^0 & \text{on } \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (1)$$

Suppose that two compactly supported initial temperatures  $u_1^0, u_2^0 \in C_c(\mathbb{R}^d)$  are *strictly separated* i.e. there exists  $\delta > 0$  such that  $\tau_\eta u_1^0 \leq u_2^0$  for any  $\eta \in B_\delta(0)$ , where  $\tau_\eta u_1^0 := u_1^0(\cdot - \eta)$  is the space

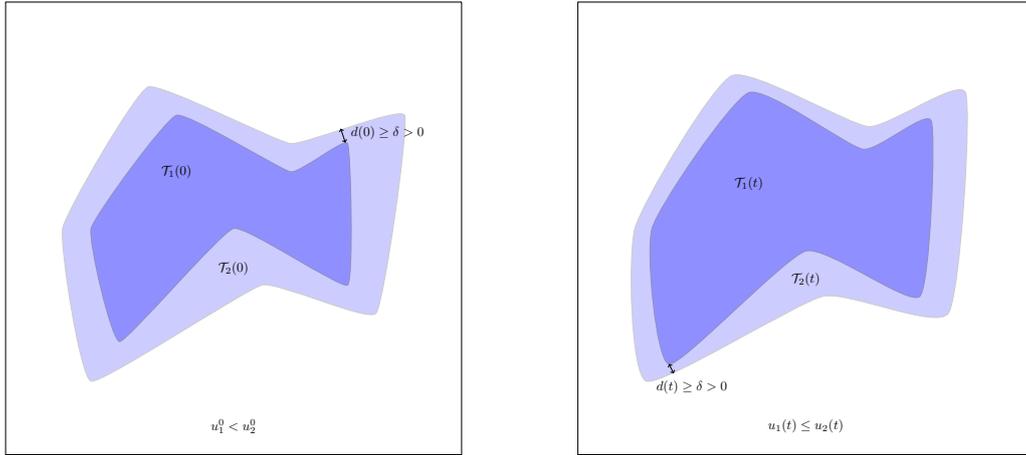


FIGURE 1 – Illustration of the asymptotic separation of the two free boundaries.

translate by  $\eta$  of  $u_1^0$ . Under such assumptions, it is already known that  $\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}(u_1) \subset \mathcal{T}_2 := \mathcal{T}(u_2)$ , but we more precisely show that for any  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$d(t) := d(\mathcal{T}_1(t), \partial_s \mathcal{T}_2(t)) \geq \delta \quad (2)$$

## Références

- [1] L. A. Caffarelli. The regularity of free boundaries in higher dimensions. *Acta Mathematica*, 139(0) :155–184, 1977.
- [2] P. Cardaliaguet. Front propagation problems with nonlocal terms, II. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 260 :572–601, 2001.
- [3] M. Crandall, H. Ishii, and P.L. Lions. User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27(1) :1–67, 1992.
- [4] I. C. Kim and N. Pozar. Viscosity solutions for the two-phase stefan problem. *Communications in Partial Differential Equations*, 36 :1 :42–66, 2010.
- [5] Oskar Perron. Eine neue behandlung der ersten randwertaufgabe für  $\Delta u = 0$ . *Mathematische Zeitschrift*, 18(1) :42–54, 1923.

# Résumé : Problème de moments pour les mesures discrètes

Ayoub Harrat

May 2022

On considère une approche qui permet de passer du problème de moments tronqué au problème complet à l'aide des idempotents. Il s'agit de une approche très différente de celle utilisée dans la première partie. Plus précisément, au lieu d'appliquer les méthodes de R. Curto et L. Fialkow où l'objet central est la matrice de moments, on utilise l'approche de F. Vasilescu dont l'objet central est la fonctionnelle de Riesz. Cette fonctionnelle fait associer à chaque monôme  $t^\alpha$  la valeur  $\gamma_\alpha$  et elle satisfait trois conditions naturelles dans le cas où la suite  $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$  est donnée par les intégrales de  $t^\alpha$  par rapport à une mesure.

Cependant ces trois conditions ne sont pas suffisantes pour assurer l'existence de la mesure en question dans le cas général. Pour aller plus loin on utilise des techniques d'analyse sur les espaces d'Hilbert (la méthode de Gelfand-Naimark-Segal) et on construit un espace à shift borné qui va s'avérer être exactement l'espace  $L^2$  associé à la mesure représentante. Ensuite, une étude plus profonde de la représentation intégrale de la fonctionnelle de Riesz est faite en exploitant une certaine notion de la multiplicativité. Cette notion est essentielle pour traiter des mesures discrètes dans ce contexte ; Le rôle fondamental est joué par des idempotents et des éléments dits  $\mathcal{A}$ -multiplicatifs. L'importance des éléments  $\mathcal{A}$ -multiplicatifs résulte du fait qu'ils sont orthogonaux dans le cas de l'espace à shift borné. Cette propriété est en relation étroite avec le problème de la caractérisation des éléments  $\mathcal{A}$ -multiplicatifs qui s'identifient à des fonctions caractéristiques de l'ensemble réduit un seul point.

## La méthode LSQR pour résoudre un problème des moindres carrés tensoriels

A. Khouia, H. SADOK, A. H. BENTBIB

Université du Cadi Ayyaad/ Université du Littoral Côte d'Opale, Université du Cadi Ayyaad, Université du Littoral Côte d'Opale

**Email :** asmaakhouia97@gmail.com

**Mots Clés :** Algèbre multilinéaire, Décomposition CP, HOSVD, Restauration d'images , Restauration de vidéos, LSQR

**Biographie** – Je m'appelle Khouia Asmaa doctorante en 3<sup>ème</sup> année, ma thèse est en cotutelle entre l'université du Littoral Côte d'Opale et l'université Cadi Ayyad au Maroc. Mon sujet de thèse porte sur l'utilisation de l'algèbre multilinéaire tensorielle numérique dans le domaine de la restauration et reconnaissance d'image et tout particulièrement lorsque les données sont incomplètes ou bien affectées par un flou et un bruit. Le financement de ma thèse est assuré par les deux universités : université du Littoral Côte d'Opale et université Cadi Ayyad.

**Resumé :** Un tenseur est un tableau multidimensionnel [4, 1]. C'est l'extension d'ordre élevé des vecteurs et des matrices. Au cours des dernières années, l'algèbre multidimensionnelle a fait l'objet d'une attention particulière par des nombreux chercheurs qui ont commencé à représenter les données sous la forme tensorielle. Dans ce travail, nous nous intéressons à la recherche d'une solution approximative  $\hat{\mathcal{X}}$  du problème de minimisation des moindres carrés  $\min_{\mathcal{X}} \|\mathcal{X} \times_1 A^{(1)} \times_2 A^{(2)} \times_3 \cdots \times_N A^{(N)} - \mathcal{G}\|$  où  $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_N}$  et  $A^{(i)} \in \mathbb{R}^{J_i \times I_i}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) sont connus, et  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$  est le tenseur inconnu à approximer. Notre approche est basée sur deux étapes. Premièrement, nous appliquons la décomposition CP [3] ou HOSVD [4] au tenseur  $\mathcal{G}$ . Deuxièmement, nous effectuons la bidiagonalisation bien connue de Golub-Kahan [5] à chaque matrice de coefficient  $A^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) pour obtenir un problème de minimisation des moindres carrés réduit. Ce type d'équations peut apparaître dans le problème de restauration des images couleur et des vidéos [2]. Quelques tests numériques sont réalisés pour montrer l'efficacité de notre méthode proposée.

## Références

- [1] Andrzej Cichocki, Rafal Zdunek, Anh Huy Phan, and Shun-ichi Amari. *Nonnegative matrix and tensor factorizations : applications to exploratory multi-way data analysis and blind source separation*. John Wiley & Sons, 2009.
- [2] Per Christian Hansen, James G Nagy, Dianne P Leary, and Rodney Miller. Deblurring images : Matrices, spectra and filtering. *Journal of Electronic Imaging*, 17(1) :019901–019901, 2008.
- [3] Richard A Harshman et al. Foundations of the parafac procedure : Models and conditions for an " explanatory " multimodal factor analysis. 1970.
- [4] Tamara G Kolda and Brett W Bader. Tensor decompositions and applications. *SIAM review*, 51(3) :455–500, 2009.
- [5] Christopher C Paige and Michael A Saunders. Lsqr : An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 8(1) :43–71, 1982.

# A data-driven Krylov model order reduction for large-scale dynamical systems

M.A. Hamadi, K. JBILOU, A. RATNANI

*Université de Littoral Côte d'Opale, Université Mohammed VI polytechnique*

**Email** : mohamed-amine.hamadi@etu.univ-littoral.fr

**Mots Clés** : Loewner framework, Interpolation method, Sylvester equation, Krylov subspaces

**Biographie** – Mohamed Amine Hamadi est un doctorant en cotutelle entre l'Université du Littoral Côte d'Opale et l'Université Polytechnique Mohammed VI (UM6P) de Benguerir-Maroc. Ses recherches portent sur la réduction de modèles par les méthodes du sous-espace de Krylov et leur application aux EDP.

## Resumé :

Some of the challenges encountered in learning dynamical systems, is the non-linearity of dynamics or in some cases, the lack of the governing physics or system's equations of motions. However, some numerically or experimentally measured data can be found. Based on this data, and using a data-driven method such as the Loewner framework, it is possible to manage this data to derive a high fidelity reduced dynamical system that mimics the behaviour of the original data. In this paper, we tackle the issue of large amount of data presented by samples of transfer functions in a frequency-domain. The main step in this framework consists on computing singular value decomposition (SVD) of the Loewner matrix which provides accurate reduced systems. However, the large amount of data prevents this decomposition from being computed properly. We exploit the fact that the Loewner and shifted Loewner matrices, the key tools of Loewner framework, satisfy certain large scale Sylvester matrix equations. Using an extended block Krylov subspace method, a good approximation in a factored form of the Loewner and shifted Loewner matrices can be obtained, also, a minimal computation cost of the SVD is ensured. This method facilitates the process of a large amount of data and guarantee a good quality of the inferred model at the end of the process. Accuracy and efficiency of our method are assessed in the final section.

## Références

- [1] I.V. Gosea, C.P. Vassal, and A.C. Antoulas. Data-driven modeling and control of large-scale dynamical systems in the loewner framework. *https://arxiv.org/abs/2108.11870.*, 2021.
- [2] A.J. Mayo and A.C. Antoulas. A framework for the solution of the generalized realization problem. *Linear Algebra and Its Applications*, 425(2-3) :634–662, 2007.