Du théorème de Macaulay à la combinatoire additive

Shalom Eliahou

LMPA, ULCO

Séminaire ADA, Calais

10 mars 2022

En bref

En bref

▷ Le théorème classique de Macaulay (1927) caractérise les fonctions de Hilbert $i \mapsto \dim R_i$ des *algèbres graduées standards* $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$

En bref

▷ Le théorème classique de Macaulay (1927) caractérise les fonctions de Hilbert $i \mapsto \dim R_i$ des *algèbres graduées standards* $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$

▷ En particulier, il donne des bornes supérieures sur la croissance de $\dim R_i$ pour $i \geq 0$

En bref

▷ Le théorème classique de Macaulay (1927) caractérise les fonctions de Hilbert $i \mapsto \dim R_i$ des *algèbres graduées standards* $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$

▷ En particulier, il donne des bornes supérieures sur la croissance de $\dim R_i$ pour $i \geq 0$

▷ Ce théorème a eu d'importantes applications en combinatoire depuis les années 1970 (McMullen, Stanley, ...)

En bref

▷ Le théorème classique de Macaulay (1927) caractérise les fonctions de Hilbert $i \mapsto \dim R_i$ des *algèbres graduées standards* $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$

▷ En particulier, il donne des bornes supérieures sur la croissance de $\dim R_i$ pour $i \geq 0$

▷ Ce théorème a eu d'importantes applications en combinatoire depuis les années 1970 (McMullen, Stanley, ...)

▷ Des applications à la *combinatoire additive* ont récemment émergé

En bref

▷ Le théorème classique de Macaulay (1927) caractérise les fonctions de Hilbert $i \mapsto \dim R_i$ des *algèbres graduées standards* $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$

▷ En particulier, il donne des bornes supérieures sur la croissance de $\dim R_i$ pour $i \geq 0$

▷ Ce théorème a eu d'importantes applications en combinatoire depuis les années 1970 (McMullen, Stanley, ...)

▷ Des applications à la *combinatoire additive* ont récemment émergé

▷ On présente ici deux telles applications, les premières semble-t-il :

En bref

▷ Le théorème classique de Macaulay (1927) caractérise les fonctions de Hilbert $i \mapsto \dim R_i$ des *algèbres graduées standards* $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$

▷ En particulier, il donne des bornes supérieures sur la croissance de $\dim R_i$ pour $i \geq 0$

▷ Ce théorème a eu d'importantes applications en combinatoire depuis les années 1970 (McMullen, Stanley, ...)

▷ Des applications à la *combinatoire additive* ont récemment émergé

▷ On présente ici deux telles applications, les premières semble-t-il :

1. Sur la conjecture de Wilf en 1978 [E. 2018]

En bref

▷ Le théorème classique de Macaulay (1927) caractérise les fonctions de Hilbert $i \mapsto \dim R_i$ des *algèbres graduées standards* $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$

▷ En particulier, il donne des bornes supérieures sur la croissance de $\dim R_i$ pour $i \geq 0$

▷ Ce théorème a eu d'importantes applications en combinatoire depuis les années 1970 (McMullen, Stanley, . . .)

▷ Des applications à la *combinatoire additive* ont récemment émergé

▷ On présente ici deux telles applications, les premières semble-t-il :

1. Sur la conjecture de Wilf en 1978 [E. 2018]
2. Sur la croissance des ensembles-somme itérés [E.-Mazumdar 2022]

En bref

▷ Le théorème classique de Macaulay (1927) caractérise les fonctions de Hilbert $i \mapsto \dim R_i$ des *algèbres graduées standards* $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$

▷ En particulier, il donne des bornes supérieures sur la croissance de $\dim R_i$ pour $i \geq 0$

▷ Ce théorème a eu d'importantes applications en combinatoire depuis les années 1970 (McMullen, Stanley, ...)

▷ Des applications à la *combinatoire additive* ont récemment émergé

▷ On présente ici deux telles applications, les premières semble-t-il :

1. Sur la conjecture de Wilf en 1978 [E. 2018]
2. Sur la croissance des ensembles-somme itérés [E.-Mazumdar 2022]

Développements binomiaux

Développements binomiaux

Proposition

Développements binomiaux

Proposition

Soit $\ell \geq 1$ *fixé.*

Développements binomiaux

Proposition

Soit $\ell \geq 1$ fixé. Pour tout entier $a \geq 0$, il existe une unique expression

Développements binomiaux

Proposition

Soit $\ell \geq 1$ fixé. Pour tout entier $a \geq 0$, il existe une unique expression

$$a = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{a_i}{i} = \binom{a_\ell}{\ell} + \binom{a_{\ell-1}}{\ell-1} + \cdots + \binom{a_1}{1}$$

Développements binomiaux

Proposition

Soit $\ell \geq 1$ fixé. Pour tout entier $a \geq 0$, il existe une unique expression

$$a = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{a_i}{i} = \binom{a_\ell}{\ell} + \binom{a_{\ell-1}}{\ell-1} + \cdots + \binom{a_1}{1}$$

avec entiers décroissants $a_\ell > a_{\ell-1} > \cdots > a_1 \geq 0$.

Développements binomiaux

Proposition

Soit $\ell \geq 1$ fixé. Pour tout entier $a \geq 0$, il existe une unique expression

$$a = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{a_i}{i} = \binom{a_\ell}{\ell} + \binom{a_{\ell-1}}{\ell-1} + \cdots + \binom{a_1}{1}$$

avec entiers décroissants $a_\ell > a_{\ell-1} > \cdots > a_1 \geq 0$.

Exemple avec $\ell = 3$

Développements binomiaux

Proposition

Soit $\ell \geq 1$ fixé. Pour tout entier $a \geq 0$, il existe une unique expression

$$a = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{a_i}{i} = \binom{a_\ell}{\ell} + \binom{a_{\ell-1}}{\ell-1} + \cdots + \binom{a_1}{1}$$

avec entiers décroissants $a_\ell > a_{\ell-1} > \cdots > a_1 \geq 0$.

Exemple avec $\ell = 3$

$$0 = \binom{2}{3} + \binom{1}{2} + \binom{0}{1}, \quad 1 = \binom{3}{3} + \binom{1}{2} + \binom{0}{1}, \quad 2 = \binom{3}{3} + \binom{2}{2} + \binom{0}{1},$$

$$3 = \binom{3}{3} + \binom{2}{2} + \binom{1}{1}, \quad 4 = \binom{4}{3} + \binom{1}{2} + \binom{0}{1}, \quad 5 = \binom{4}{3} + \binom{2}{2} + \binom{0}{1}.$$

Développements binomiaux

Proposition

Soit $\ell \geq 1$ fixé. Pour tout entier $a \geq 0$, il existe une unique expression

$$a = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{a_i}{i} = \binom{a_\ell}{\ell} + \binom{a_{\ell-1}}{\ell-1} + \cdots + \binom{a_1}{1}$$

avec entiers décroissants $a_\ell > a_{\ell-1} > \cdots > a_1 \geq 0$.

Exemple avec $\ell = 3$

$$0 = \binom{2}{3} + \binom{1}{2} + \binom{0}{1}, \quad 1 = \binom{3}{3} + \binom{1}{2} + \binom{0}{1}, \quad 2 = \binom{3}{3} + \binom{2}{2} + \binom{0}{1},$$

$$3 = \binom{3}{3} + \binom{2}{2} + \binom{1}{1}, \quad 4 = \binom{4}{3} + \binom{1}{2} + \binom{0}{1}, \quad 5 = \binom{4}{3} + \binom{2}{2} + \binom{0}{1}.$$

Ainsi, pour $\ell \geq 1$ donné, le ℓème développement binomial est une sorte de système de numération, avec une infinité de chiffres mais de longueur fixe ℓ

Ainsi, pour $\ell \geq 1$ donné, le ℓème développement binomial est une sorte de système de numération, avec une infinité de chiffres mais de longueur fixe ℓ – par contraste avec le cas classique, avec un nombre fini de chiffres mais de longueur non bornée.

Ainsi, pour $\ell \geq 1$ donné, le ℓème développement binomial est une sorte de système de numération, avec une infinité de chiffres mais de longueur fixe ℓ – par contraste avec le cas classique, avec un nombre fini de chiffres mais de longueur non bornée.

Exemple avec $\ell = 3$ (suite)

Ainsi, pour $\ell \geq 1$ donné, le ℓème développement binomial est une sorte de système de numération, avec une infinité de chiffres mais de longueur fixe ℓ – par contraste avec le cas classique, avec un nombre fini de chiffres mais de longueur non bornée.

Exemple avec $\ell = 3$ (suite)

On code $\binom{a_3}{3} + \binom{a_2}{2} + \binom{a_1}{1}$ par $a_3|a_2|a1$. Rappel : $a_3 > a_2 > a_1 \geq 0$.

Ainsi, pour $\ell \geq 1$ donné, le ℓème développement binomial est une sorte de système de numération, avec une infinité de chiffres mais de longueur fixe ℓ – par contraste avec le cas classique, avec un nombre fini de chiffres mais de longueur non bornée.

Exemple avec $\ell = 3$ (suite)

On code $\binom{a_3}{3} + \binom{a_2}{2} + \binom{a_1}{1}$ par $a_3|a_2|a1$. Rappel : $a_3 > a_2 > a_1 \geq 0$.

2|1|0

Ainsi, pour $\ell \geq 1$ donné, le ℓème développement binomial est une sorte de système de numération, avec une infinité de chiffres mais de longueur fixe ℓ – par contraste avec le cas classique, avec un nombre fini de chiffres mais de longueur non bornée.

Exemple avec $\ell = 3$ (suite)

On code $\binom{a_3}{3} + \binom{a_2}{2} + \binom{a_1}{1}$ par $a_3|a_2|a1$. Rappel : $a_3 > a_2 > a_1 \geq 0$.

2|1|0		
3|1|0	3|2|0	3|2|1

Ainsi, pour $\ell \geq 1$ donné, le ℓème développement binomial est une sorte de système de numération, avec une infinité de chiffres mais de longueur fixe ℓ – par contraste avec le cas classique, avec un nombre fini de chiffres mais de longueur non bornée.

Exemple avec $\ell = 3$ (suite)

On code $\binom{a_3}{3} + \binom{a_2}{2} + \binom{a_1}{1}$ par $a_3|a_2|a1$. Rappel : $a_3 > a_2 > a_1 \geq 0$.

2|1|0					
3|1|0	3|2|0	3|2|1			
4|1|0	4|2|0	4|2|1	4|3|0	4|3|1	4|3|2

Ainsi, pour $\ell \geq 1$ donné, le ℓème développement binomial est une sorte de système de numération, avec une infinité de chiffres mais de longueur fixe ℓ – par contraste avec le cas classique, avec un nombre fini de chiffres mais de longueur non bornée.

Exemple avec $\ell = 3$ (suite)

On code $\binom{a_3}{3} + \binom{a_2}{2} + \binom{a_1}{1}$ par $a_3|a_2|a1$. Rappel : $a_3 > a_2 > a_1 \geq 0$.

2|1|0									
3|1|0	3|2|0	3|2|1							
4|1|0	4|2|0	4|2|1	4|3|0	4|3|1	4|3|2				
5|1|0	5|2|0	5|2|1	5|3|0	5|3|1	5|3|2	5|4|0	5|4|1	5|4|2	5|4|3

Ainsi, pour $\ell \geq 1$ donné, le ℓème développement binomial est une sorte de système de numération, avec une infinité de chiffres mais de longueur fixe ℓ – par contraste avec le cas classique, avec un nombre fini de chiffres mais de longueur non bornée.

Exemple avec $\ell = 3$ (suite)

On code $\binom{a_3}{3} + \binom{a_2}{2} + \binom{a_1}{1}$ par $a_3|a_2|a1$. Rappel : $a_3 > a_2 > a_1 \geq 0$.

2|1|0											
3|1|0	3|2|0	3|2|1									
4|1|0	4|2|0	4|2|1	4|3|0	4|3|1	4|3|2						
5|1|0	5|2|0	5|2|1	5|3|0	5|3|1	5|3|2	5|4|0	5|4|1	5|4|2	5|4|3		
6|1|0	6|2|0	6|2|1	6|3|0	6|3|1	6|3|2	6|4|0	6|4|1	6|4|2	6|4|3	...	6|5|4

Ainsi, pour $\ell \geq 1$ donné, le ℓème développement binomial est une sorte de système de numération, avec une infinité de chiffres mais de longueur fixe ℓ – par contraste avec le cas classique, avec un nombre fini de chiffres mais de longueur non bornée.

Exemple avec $\ell = 3$ (suite)

On code $\binom{a_3}{3} + \binom{a_2}{2} + \binom{a_1}{1}$ par $a_3|a_2|a1$. Rappel : $a_3 > a_2 > a_1 \geq 0$.

2|1|0											
3|1|0	3|2|0	3|2|1									
4|1|0	4|2|0	4|2|1	4|3|0	4|3|1	4|3|2						
5|1|0	5|2|0	5|2|1	5|3|0	5|3|1	5|3|2	5|4|0	5|4|1	5|4|2	5|4|3		
6|1|0	6|2|0	6|2|1	6|3|0	6|3|1	6|3|2	6|4|0	6|4|1	6|4|2	6|4|3	...	6|5|4
7|1|0	7|2|0	7|2|1	7|3|0	...							
⋮											

Ainsi, pour $\ell \geq 1$ donné, le ℓème développement binomial est une sorte de système de numération, avec une infinité de chiffres mais de longueur fixe ℓ – par contraste avec le cas classique, avec un nombre fini de chiffres mais de longueur non bornée.

Exemple avec $\ell = 3$ (suite)

On code $\binom{a_3}{3} + \binom{a_2}{2} + \binom{a_1}{1}$ par $a_3|a_2|a1$. Rappel : $a_3 > a_2 > a_1 \geq 0$.

2|1|0											
3|1|0	3|2|0	3|2|1									
4|1|0	4|2|0	4|2|1	4|3|0	4|3|1	4|3|2						
5|1|0	5|2|0	5|2|1	5|3|0	5|3|1	5|3|2	5|4|0	5|4|1	5|4|2	5|4|3		
6|1|0	6|2|0	6|2|1	6|3|0	6|3|1	6|3|2	6|4|0	6|4|1	6|4|2	6|4|3	…	6|5|4
7|1|0	7|2|0	7|2|1	7|3|0	…							
⋮											

L'opération $a \mapsto a^{\langle \ell \rangle}$

L'opération $a \mapsto a^{\langle \ell \rangle}$

L'opération $a \mapsto a^{\langle \ell \rangle}$

Pour tout $a \in \mathbb{N}$, on considère son ℓème développement binomial

$$a = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{a_i}{i} = \binom{a_\ell}{\ell} + \binom{a_{\ell-1}}{\ell-1} + \cdots + \binom{a_1}{1}$$

avec $a_\ell > a_{\ell-1} > \cdots > a_1 \geq 0$.

L'opération $a \mapsto a^{\langle \ell \rangle}$

Pour tout $a \in \mathbb{N}$, on considère son ℓème développement binomial

$$a = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{a_i}{i} = \binom{a_\ell}{\ell} + \binom{a_{\ell-1}}{\ell-1} + \cdots + \binom{a_1}{1}$$

avec $a_\ell > a_{\ell-1} > \cdots > a_1 \geq 0$. On pose alors

$$a^{\langle \ell \rangle} = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{a_i + 1}{i+1}.$$

L'opération $a \mapsto a^{\langle \ell \rangle}$

Pour tout $a \in \mathbb{N}$, on considère son ℓème développement binomial

$$a = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{a_i}{i} = \binom{a_\ell}{\ell} + \binom{a_{\ell-1}}{\ell-1} + \cdots + \binom{a_1}{1}$$

avec $a_\ell > a_{\ell-1} > \cdots > a_1 \geq 0$. On pose alors

$$a^{\langle \ell \rangle} = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{a_i+1}{i+1}.$$

Exemple avec $\ell = 6$

L'opération $a \mapsto a^{\langle \ell \rangle}$

Pour tout $a \in \mathbb{N}$, on considère son ℓème développement binomial

$$a = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{a_i}{i} = \binom{a_\ell}{\ell} + \binom{a_{\ell-1}}{\ell-1} + \cdots + \binom{a_1}{1}$$

avec $a_\ell > a_{\ell-1} > \cdots > a_1 \geq 0$. On pose alors

$$a^{\langle \ell \rangle} = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{a_i + 1}{i+1}.$$

Exemple avec $\ell = 6$

$$1000 = \binom{12}{6} + \binom{8}{5} + \binom{6}{4} + \binom{4}{3} + \binom{2}{2} + \binom{0}{1}$$

$$1000^{\langle 6 \rangle} = \binom{13}{7} + \binom{9}{6} + \binom{7}{5} + \binom{5}{4} + \binom{3}{3} = 1827.$$

L'opération $a \mapsto a^{\langle \ell \rangle}$

Pour tout $a \in \mathbb{N}$, on considère son ℓème développement binomial

$$a = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{a_i}{i} = \binom{a_\ell}{\ell} + \binom{a_{\ell-1}}{\ell-1} + \cdots + \binom{a_1}{1}$$

avec $a_\ell > a_{\ell-1} > \cdots > a_1 \geq 0$. On pose alors

$$a^{\langle \ell \rangle} = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{a_i + 1}{i+1}.$$

Exemple avec $\ell = 6$

$$1000 = \binom{12}{6} + \binom{8}{5} + \binom{6}{4} + \binom{4}{3} + \binom{2}{2} + \binom{0}{1}$$

$$1000^{\langle 6 \rangle} = \binom{13}{7} + \binom{9}{6} + \binom{7}{5} + \binom{5}{4} + \binom{3}{3} = 1827.$$

Fonctions de Hilbert

Fonctions de Hilbert

Une **algèbre graduée standard** est une algèbre commutative graduée $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$, finiment engendrée en degré 1 sur le corps $R_0 = K$.

Fonctions de Hilbert

Une **algèbre graduée standard** est une algèbre commutative graduée $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$, finiment engendrée en degré 1 sur le corps $R_0 = K$.

En particulier, $R_i R_j = R_{i+j}$ for all $i, j \geq 0$.

Fonctions de Hilbert

Une **algèbre graduée standard** est une algèbre commutative graduée $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$, finiment engendrée en degré 1 sur le corps $R_0 = K$.

En particulier, $R_i R_j = R_{i+j}$ for all $i, j \geq 0$.

De façon équivalente, c'est un quotient $R = K[X_1, \ldots, X_n]/J$, où J est un idéal homogène de $K[X_1, \ldots, X_n]$ pour la graduation standard.

Fonctions de Hilbert

Une **algèbre graduée standard** est une algèbre commutative graduée $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$, finiment engendrée en degré 1 sur le corps $R_0 = K$.

En particulier, $R_i R_j = R_{i+j}$ for all $i, j \geq 0$.

De façon équivalente, c'est un quotient $R = K[X_1, \ldots, X_n]/J$, où J est un idéal homogène de $K[X_1, \ldots, X_n]$ pour la graduation standard.

La **fonction de Hilbert** de $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$ est la fonction $i \mapsto \dim R_i$ pour tout i.

Fonctions de Hilbert

Une **algèbre graduée standard** est une algèbre commutative graduée $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$, finiment engendrée en degré 1 sur le corps $R_0 = K$.

En particulier, $R_i R_j = R_{i+j}$ for all $i, j \geq 0$.

De façon équivalente, c'est un quotient $R = K[X_1, \ldots, X_n]/J$, où J est un idéal homogène de $K[X_1, \ldots, X_n]$ pour la graduation standard.

La **fonction de Hilbert** de $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$ est la fonction $i \mapsto \dim R_i$ pour tout i.

Le théorème de Macaulay (1927) caractérise les fonctions numériques $i \mapsto d_i$ de ce type.

Fonctions de Hilbert

Une **algèbre graduée standard** est une algèbre commutative graduée $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$, finiment engendrée en degré 1 sur le corps $R_0 = K$.

En particulier, $R_i R_j = R_{i+j}$ for all $i, j \geq 0$.

De façon équivalente, c'est un quotient $R = K[X_1, \dots, X_n]/J$, où J est un idéal homogène de $K[X_1, \dots, X_n]$ pour la graduation standard.

La **fonction de Hilbert** de $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$ est la fonction $i \mapsto \dim R_i$ pour tout i.

Le théorème de Macaulay (1927) caractérise les fonctions numériques $i \mapsto d_i$ de ce type.

Théorème (Macaulay 1927)

Théorème (Macaulay 1927)

Soit $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ *une algèbre graduée standard sur le corps* K*, avec fonction de Hilbert* $d_i = \dim R_i$.

Théorème (Macaulay 1927)

Soit $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ *une algèbre graduée standard sur le corps* K*, avec fonction de Hilbert* $d_i = \dim R_i$*. Alors* $d_0 = 1$ *et* $d_{i+1} \leq d_i^{\langle i \rangle}$ *pour tout* $i \geq 1$*.*

Théorème (Macaulay 1927)

Soit $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ une algèbre graduée standard sur le corps K, avec fonction de Hilbert $d_i = \dim R_i$. Alors $d_0 = 1$ et $d_{i+1} \leq d_i^{\langle i \rangle}$ pour tout $i \geq 1$. ***Réciproquement****, toute fonction $i \mapsto d_i$ sur $\mathbb{N}$ satisfaisant ces conditions est la fonction de Hilbert d'une algèbre graduée standard.*

Théorème (Macaulay 1927)

Soit $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ une algèbre graduée standard sur le corps K, avec fonction de Hilbert $d_i = \dim R_i$. Alors $d_0 = 1$ et $d_{i+1} \leq d_i^{\langle i \rangle}$ pour tout $i \geq 1$. ***Réciproquement****, toute fonction $i \mapsto d_i$ sur $\mathbb{N}$ satisfaisant ces conditions est la fonction de Hilbert d'une algèbre graduée standard.*

Exemple

Supposons $d_6 = 1000$.

Théorème (Macaulay 1927)

Soit $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ *une algèbre graduée standard sur le corps* K*, avec fonction de Hilbert* $d_i = \dim R_i$*. Alors* $d_0 = 1$ *et* $d_{i+1} \leq d_i^{\langle i \rangle}$ *pour tout* $i \geq 1$*.* ***Réciproquement****, toute fonction* $i \mapsto d_i$ *sur* $\mathbb{N}$ *satisfaisant ces conditions est la fonction de Hilbert d'une algèbre graduée standard.*

Exemple

Supposons $d_6 = 1000$. Macaulay donne $d_7 \leq d_6^{\langle 6 \rangle}$.

Théorème (Macaulay 1927)

Soit $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$ *une algèbre graduée standard sur le corps* K*, avec fonction de Hilbert* $d_i = \dim R_i$. *Alors* $d_0 = 1$ *et* $d_{i+1} \leq d_i^{\langle i \rangle}$ *pour tout* $i \geq 1$. ***Réciproquement****, toute fonction* $i \mapsto d_i$ *sur* $\mathbb{N}$ *satisfaisant ces conditions est la fonction de Hilbert d'une algèbre graduée standard.*

Exemple

Supposons $d_6 = 1000$. Macaulay donne $d_7 \leq d_6^{\langle 6 \rangle}$. Or $1000^{\langle 6 \rangle} = 1827$.

Théorème (Macaulay 1927)

*Soit $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ une algèbre graduée standard sur le corps K, avec fonction de Hilbert $d_i = \dim R_i$. Alors $d_0 = 1$ et $d_{i+1} \leq d_i^{\langle i \rangle}$ pour tout $i \geq 1$. **Réciproquement**, toute fonction $i \mapsto d_i$ sur $\mathbb{N}$ satisfaisant ces conditions est la fonction de Hilbert d'une algèbre graduée standard.*

Exemple

Supposons $d_6 = 1000$. Macaulay donne $d_7 \leq d_6^{\langle 6 \rangle}$. Or $1000^{\langle 6 \rangle} = 1827$. Donc $d_7 \leq 1827$.

Théorème (Macaulay 1927)

Soit $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$ une algèbre graduée standard sur le corps K, avec fonction de Hilbert $d_i = \dim R_i$. Alors $d_0 = 1$ et $d_{i+1} \leq d_i^{\langle i \rangle}$ pour tout $i \geq 1$. ***Réciproquement****, toute fonction $i \mapsto d_i$ sur $\mathbb{N}$ satisfaisant ces conditions est la fonction de Hilbert d'une algèbre graduée standard.*

Exemple

Supposons $d_6 = 1000$. Macaulay donne $d_7 \leq d_6^{\langle 6 \rangle}$. Or $1000^{\langle 6 \rangle} = 1827$. Donc $d_7 \leq 1827$.

Théorème ("Macaulay condensé", E. 2018)

Théorème (Macaulay 1927)

*Soit $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$ une algèbre graduée standard sur le corps K, avec fonction de Hilbert $d_i = \dim R_i$. Alors $d_0 = 1$ et $d_{i+1} \leq d_i^{\langle i \rangle}$ pour tout $i \geq 1$. **Réciproquement**, toute fonction $i \mapsto d_i$ sur $\mathbb{N}$ satisfaisant ces conditions est la fonction de Hilbert d'une algèbre graduée standard.*

Exemple

Supposons $d_6 = 1000$. Macaulay donne $d_7 \leq d_6^{\langle 6 \rangle}$. Or $1000^{\langle 6 \rangle} = 1827$. Donc $d_7 \leq 1827$.

Théorème ("Macaulay condensé", E. 2018)

Soit $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$ une algèbre graduée standard avec fonction de Hilbert $d_i = \dim R_i$.

Théorème (Macaulay 1927)

Soit $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ *une algèbre graduée standard sur le corps* K*, avec fonction de Hilbert* $d_i = \dim R_i$*. Alors* $d_0 = 1$ *et* $d_{i+1} \leq d_i^{\langle i \rangle}$ *pour tout* $i \geq 1$*.* ***Réciproquement****, toute fonction* $i \mapsto d_i$ *sur* $\mathbb{N}$ *satisfaisant ces conditions est la fonction de Hilbert d'une algèbre graduée standard.*

Exemple

Supposons $d_6 = 1000$. Macaulay donne $d_7 \leq d_6^{\langle 6 \rangle}$. Or $1000^{\langle 6 \rangle} = 1827$. Donc $d_7 \leq 1827$.

Théorème ("Macaulay condensé", E. 2018)

Soit $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ *une algèbre graduée standard avec fonction de Hilbert* $d_i = \dim R_i$*. Soit* $i \geq 1$*. Soit* x *l'unique nombre réel t.q.* $x \geq i - 1$ *et*

$$d_i = \binom{x}{i}.$$

Théorème (Macaulay 1927)

*Soit $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$ une algèbre graduée standard sur le corps K, avec fonction de Hilbert $d_i = \dim R_i$. Alors $d_0 = 1$ et $d_{i+1} \leq d_i^{\langle i \rangle}$ pour tout $i \geq 1$. **Réciproquement**, toute fonction $i \mapsto d_i$ sur $\mathbb{N}$ satisfaisant ces conditions est la fonction de Hilbert d'une algèbre graduée standard.*

Exemple

Supposons $d_6 = 1000$. Macaulay donne $d_7 \leq d_6^{\langle 6 \rangle}$. Or $1000^{\langle 6 \rangle} = 1827$. Donc $d_7 \leq 1827$.

Théorème ("Macaulay condensé", E. 2018)

Soit $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$ une algèbre graduée standard avec fonction de Hilbert $d_i = \dim R_i$. Soit $i \geq 1$. Soit x l'unique nombre réel t.q. $x \geq i - 1$ et $d_i = \binom{x}{i}$. Alors $d_{i+1} \leq \binom{x+1}{i+1}$.

Théorème (Macaulay 1927)

*Soit $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$ une algèbre graduée standard sur le corps K, avec fonction de Hilbert $d_i = \dim R_i$. Alors $d_0 = 1$ et $d_{i+1} \leq d_i^{\langle i \rangle}$ pour tout $i \geq 1$. **Réciproquement**, toute fonction $i \mapsto d_i$ sur $\mathbb{N}$ satisfaisant ces conditions est la fonction de Hilbert d'une algèbre graduée standard.*

Exemple

Supposons $d_6 = 1000$. Macaulay donne $d_7 \leq d_6^{\langle 6 \rangle}$. Or $1000^{\langle 6 \rangle} = 1827$. Donc $d_7 \leq 1827$.

Théorème ("Macaulay condensé", E. 2018)

Soit $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$ une algèbre graduée standard avec fonction de Hilbert $d_i = \dim R_i$. Soit $i \geq 1$. Soit x l'unique nombre réel t.q. $x \geq i - 1$ et $d_i = \binom{x}{i}$. Alors $d_{i+1} \leq \binom{x+1}{i+1}$.

Somme d'ensembles

Somme d'ensembles

▷ Soient A, B des sous-ensembles d'un groupe abélien $(G, +)$.

Somme d'ensembles

▷ Soient A, B des sous-ensembles d'un groupe abélien $(G, +)$. Notons

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

la somme de A, B.

Somme d'ensembles

▷ Soient A, B des sous-ensembles d'un groupe abélien $(G, +)$. Notons

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

la somme de A, B. En particulier, pour $h \geq 2$,

$$hA = A + (h-1)A = \underbrace{A + \cdots + A}_{h}.$$

Somme d'ensembles

▷ Soient A, B des sous-ensembles d'un groupe abélien $(G,+)$. Notons

$$A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$$

la somme de A, B. En particulier, pour $h \geq 2$,

$$hA = A+(h-1)A = \underbrace{A+\cdots+A}_{h}.$$

▷ Si A est fini, comment la suite $|hA|$ croît-elle avec h?

Somme d'ensembles

▷ Soient A, B des sous-ensembles d'un groupe abélien $(G, +)$. Notons

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

la somme de A, B. En particulier, pour $h \geq 2$,

$$hA = A + (h-1)A = \underbrace{A + \cdots + A}_{h}.$$

▷ Si A est fini, comment la suite $|hA|$ croît-elle avec h?

▷ Pour appliquer le théorème de Macaulay à cette question, on construit une algèbre graduée standard $R(A)$ telle que pour tout $h \geq 0$,

$$|hA| = \dim R_h.$$

Somme d'ensembles

▷ Soient A, B des sous-ensembles d'un groupe abélien $(G, +)$. Notons

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

la somme de A, B. En particulier, pour $h \geq 2$,

$$hA = A + (h-1)A = \underbrace{A + \cdots + A}_{h}.$$

▷ Si A est fini, comment la suite $|hA|$ croît-elle avec h?

▷ Pour appliquer le théorème de Macaulay à cette question, on construit une algèbre graduée standard $R(A)$ telle que pour tout $h \geq 0$,

$$|hA| = \dim R_h.$$

L'algèbre $R(A)$

L'algèbre $R(A)$

Soit K un corps.

L'algèbre $R(A)$

Soit K un corps.

$\triangleright$ Considérons l'**algèbre de groupe** $K[G]$ de G.

L'algèbre $R(A)$

Soit K un corps.

▷ Considérons l'**algèbre de groupe** $K[G]$ de G.

- K-base canonique : l'ensemble des symboles $\{t^g \mid g \in G\}$

L'algèbre $R(A)$

Soit K un corps.

▷ Considérons l'**algèbre de groupe** $K[G]$ de G.

- K-base canonique : l'ensemble des symboles $\{t^g \mid g \in G\}$
- Le produit est induit par la formule $t^{g_1} t^{g_2} = t^{g_1+g_2}$

L'algèbre $R(A)$

Soit K un corps.

▷ Considérons l'**algèbre de groupe** $K[G]$ de G.

- K-base canonique : l'ensemble des symboles $\{t^g \mid g \in G\}$
- Le produit est induit par la formule $t^{g_1} t^{g_2} = t^{g_1+g_2}$

▷ Soit $S = K[G][X]$ l'algèbre des polynômes en X sur $K[G]$.

L'algèbre $R(A)$

Soit K un corps.

▷ Considérons l'**algèbre de groupe** $K[G]$ de G.

- K-base canonique : l'ensemble des symboles $\{t^g \mid g \in G\}$
- Le produit est induit par la formule $t^{g_1} t^{g_2} = t^{g_1+g_2}$

▷ Soit $S = K[G][X]$ l'algèbre des polynômes en X sur $K[G]$.

- K-base canonique : $\{t^g X^n \mid g \in G, n \in \mathbb{N}\}$

L'algèbre $R(A)$

Soit K un corps.

▷ Considérons l'**algèbre de groupe** $K[G]$ de G.

- K-base canonique : l'ensemble des symboles $\{t^g \mid g \in G\}$
- Le produit est induit par la formule $t^{g_1} t^{g_2} = t^{g_1+g_2}$

▷ Soit $S = K[G][X]$ l'algèbre des polynômes en X sur $K[G]$.

- K-base canonique : $\{t^g X^n \mid g \in G, n \in \mathbb{N}\}$
- Produit des éléments de base : $t^{g_1} X^{n_1} \cdot t^{g_2} X^{n_2} = t^{g_1+g_2} X^{n_1+n_2}$

L'algèbre $R(A)$

Soit K un corps.

▷ Considérons l'**algèbre de groupe** $K[G]$ de G.

- K-base canonique : l'ensemble des symboles $\{t^g \mid g \in G\}$
- Le produit est induit par la formule $t^{g_1} t^{g_2} = t^{g_1+g_2}$

▷ Soit $S = K[G][X]$ l'algèbre des polynômes en X sur $K[G]$.

- K-base canonique : $\{t^g X^n \mid g \in G, n \in \mathbb{N}\}$
- Produit des éléments de base : $t^{g_1} X^{n_1} \cdot t^{g_2} X^{n_2} = t^{g_1+g_2} X^{n_1+n_2}$
- Degré d'un élément de base : $\deg(t^g X^n) = n$

L'algèbre $R(A)$

Soit K un corps.

▷ Considérons l'**algèbre de groupe** $K[G]$ de G.

- K-base canonique : l'ensemble des symboles $\{t^g \mid g \in G\}$
- Le produit est induit par la formule $t^{g_1} t^{g_2} = t^{g_1+g_2}$

▷ Soit $S = K[G][X]$ l'algèbre des polynômes en X sur $K[G]$.

- K-base canonique : $\{t^g X^n \mid g \in G, n \in \mathbb{N}\}$
- Produit des éléments de base : $t^{g_1} X^{n_1} \cdot t^{g_2} X^{n_2} = t^{g_1+g_2} X^{n_1+n_2}$
- Degré d'un élément de base : $\deg(t^g X^n) = n$

▷ Ainsi $S = \oplus_{i \geq 0} S_i$ est une K-algèbre graduée.

L'algèbre $R(A)$

Soit K un corps.

▷ Considérons l'**algèbre de groupe** $K[G]$ de G.

- K-base canonique : l'ensemble des symboles $\{t^g \mid g \in G\}$
- Le produit est induit par la formule $t^{g_1} t^{g_2} = t^{g_1+g_2}$

▷ Soit $S = K[G][X]$ l'algèbre des polynômes en X sur $K[G]$.

- K-base canonique : $\{t^g X^n \mid g \in G, n \in \mathbb{N}\}$
- Produit des éléments de base : $t^{g_1} X^{n_1} \cdot t^{g_2} X^{n_2} = t^{g_1+g_2} X^{n_1+n_2}$
- Degré d'un élément de base : $\deg(t^g X^n) = n$

▷ Ainsi $S = \oplus_{i \geq 0} S_i$ est une K-algèbre graduée. Pour tout $i \geq 0$,

$$S_i = \langle \{t^g X^i \mid g \in G\} \rangle.$$

L'algèbre $R(A)$

Soit K un corps.

▷ Considérons l'**algèbre de groupe** $K[G]$ de G.

- K-base canonique : l'ensemble des symboles $\{t^g \mid g \in G\}$
- Le produit est induit par la formule $t^{g_1} t^{g_2} = t^{g_1+g_2}$

▷ Soit $S = K[G][X]$ l'algèbre des polynômes en X sur $K[G]$.

- K-base canonique : $\{t^g X^n \mid g \in G, n \in \mathbb{N}\}$
- Produit des éléments de base : $t^{g_1} X^{n_1} \cdot t^{g_2} X^{n_2} = t^{g_1+g_2} X^{n_1+n_2}$
- Degré d'un élément de base : $\deg(t^g X^n) = n$

▷ Ainsi $S = \oplus_{i \geq 0} S_i$ est une K-algèbre graduée. Pour tout $i \geq 0$,

$$S_i = \langle \{t^g X^i \mid g \in G\} \rangle.$$

Définition

Soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq G$.

Définition

Soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq G$*. Posons* $R(A) = K[t^{a_1}X, \ldots, t^{a_n}X]$*, la sous-*$K$*-algèbre de* $S = K[G][X]$ *engendrée par* $\{t^{a_1}X, \ldots, t^{a_n}X\}$*.*

Définition

Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq G$. *Posons* $R(A) = K[t^{a_1}X, \dots, t^{a_n}X]$, *la sous-*$K$*-algèbre de* $S = K[G][X]$ *engendrée par* $\{t^{a_1}X, \dots, t^{a_n}X\}$.

- Engendrée en degré 1, $R(A)$ est une algèbre graduée standard.

Définition

Soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq G$*. Posons* $R(A) = K[t^{a_1}X, \ldots, t^{a_n}X]$*, la sous-*$K$*-algèbre de* $S = K[G][X]$ *engendrée par* $\{t^{a_1}X, \ldots, t^{a_n}X\}$*.*

• Engendrée en degré 1, $R(A)$ est une algèbre graduée standard.

• On a $R(A) = \oplus_{i \geq 0} R_i$, où R_i est le K-espace vectoriel de base l'ensemble $\{t^b X^i \mid b \in iA\}$.

Définition

Soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq G$. *Posons* $R(A) = K[t^{a_1}X, \ldots, t^{a_n}X]$, *la sous-*$K$*-algèbre de* $S = K[G][X]$ *engendrée par* $\{t^{a_1}X, \ldots, t^{a_n}X\}$.

• Engendrée en degré 1, $R(A)$ est une algèbre graduée standard.

• On a $R(A) = \oplus_{i \geq 0} R_i$, où R_i est le K-espace vectoriel de base l'ensemble $\{t^b X^i \mid b \in iA\}$.

$\triangleright$ Par exemple, $R_2 = \langle t^{a_i + a_j} X^2 \mid 1 \leq i \leq j \leq n \rangle$.

Définition

Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq G$. *Posons* $R(A) = K[t^{a_1}X, \dots, t^{a_n}X]$, *la sous-*$K$*-algèbre de* $S = K[G][X]$ *engendrée par* $\{t^{a_1}X, \dots, t^{a_n}X\}$.

• Engendrée en degré 1, $R(A)$ est une algèbre graduée standard.

• On a $R(A) = \oplus_{i \geq 0} R_i$, où R_i est le K-espace vectoriel de base l'ensemble $\{t^b X^i \mid b \in iA\}$.

▷ Par exemple, $R_2 = \langle t^{a_i + a_j} X^2 \mid 1 \leq i \leq j \leq n \rangle$.

• Donc pour tout $h \geq 0$,

$$\dim R_h = |hA|.$$

Définition

Soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq G$*. Posons* $R(A) = K[t^{a_1}X, \ldots, t^{a_n}X]$*, la sous-*$K$*-algèbre de* $S = K[G][X]$ *engendrée par* $\{t^{a_1}X, \ldots, t^{a_n}X\}$*.*

• Engendrée en degré 1, $R(A)$ est une algèbre graduée standard.

• On a $R(A) = \oplus_{i \geq 0} R_i$, où R_i est le K-espace vectoriel de base l'ensemble $\{t^b X^i \mid b \in iA\}$.

▷ Par exemple, $R_2 = \langle t^{a_i + a_j} X^2 \mid 1 \leq i \leq j \leq n \rangle$.

• Donc pour tout $h \geq 0$,

$$\dim R_h = |hA|.$$

Conséquence

On obtient des bornes supérieures sur la croissance de $|hA|$ en appliquant le théorème de Macaulay, $d_{h+1} \leq d_h^{\langle h \rangle}$, à l'algèbre $R(A)$.

Définition

Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq G$*. Posons* $R(A) = K[t^{a_1}X, \dots, t^{a_n}X]$*, la sous-*$K$*-algèbre de* $S = K[G][X]$ *engendrée par* $\{t^{a_1}X, \dots, t^{a_n}X\}$*.*

- Engendrée en degré 1, $R(A)$ est une algèbre graduée standard.
- On a $R(A) = \oplus_{i \geq 0} R_i$, où R_i est le K-espace vectoriel de base l'ensemble $\{t^b X^i \mid b \in iA\}$.

  ▷ Par exemple, $R_2 = \langle t^{a_i+a_j} X^2 \mid 1 \leq i \leq j \leq n \rangle$.
- Donc pour tout $h \geq 0$,

$$\dim R_h = |hA|.$$

Conséquence

On obtient des bornes supérieures sur la croissance de $|hA|$ en appliquant le théorème de Macaulay, $d_{h+1} \leq d_h^{\langle h \rangle}$, à l'algèbre $R(A)$.

Application I. Semigroupes numériques

Application I. Semigroupes numériques

Définitions équivalentes des **semigroupes numériques** $S \subseteq \mathbb{N}$:

Application I. Semigroupes numériques

Définitions équivalentes des **semigroupes numériques** $S \subseteq \mathbb{N}$:

1. Comme sous-monoïdes cofinis de $\mathbb{N}$ ($0 \in S$, $S + S \subseteq S$, $\mathbb{N} \setminus S$ fini)

Application I. Semigroupes numériques

Définitions équivalentes des **semigroupes numériques** $S \subseteq \mathbb{N}$:

1. Comme sous-monoïdes cofinis de $\mathbb{N}$ ($0 \in S$, $S + S \subseteq S$, $\mathbb{N} \setminus S$ fini)
2. $S = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = a_1\mathbb{N} + \cdots + a_n\mathbb{N}$ où $\mathrm{pgcd}(a_1, \ldots, a_n) = 1$

Application I. Semigroupes numériques

Définitions équivalentes des **semigroupes numériques** $S \subseteq \mathbb{N}$:

1. Comme sous-monoïdes cofinis de $\mathbb{N}$ ($0 \in S$, $S + S \subseteq S$, $\mathbb{N} \setminus S$ fini)
2. $S = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = a_1\mathbb{N} + \cdots + a_n\mathbb{N}$ où $\mathrm{pgcd}(a_1, \ldots, a_n) = 1$

▷ Exemple typique : $S = \langle 4, 7, 9 \rangle = 4\mathbb{N} + 7\mathbb{N} + 9\mathbb{N}$: toutes les combinaisons linéaires de $4, 7, 9$ à coefficients dans $\mathbb{N}$.

Application I. Semigroupes numériques

Définitions équivalentes des **semigroupes numériques** $S \subseteq \mathbb{N}$:

1. Comme sous-monoïdes cofinis de $\mathbb{N}$ ($0 \in S$, $S + S \subseteq S$, $\mathbb{N} \setminus S$ fini)
2. $S = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = a_1\mathbb{N} + \cdots + a_n\mathbb{N}$ où $\mathrm{pgcd}(a_1, \ldots, a_n) = 1$

▷ Exemple typique : $S = \langle 4, 7, 9 \rangle = 4\mathbb{N} + 7\mathbb{N} + 9\mathbb{N}$: toutes les combinaisons linéaires de $4, 7, 9$ à coefficients dans $\mathbb{N}$.

▷ Inventés par Sylvester en 1884, comme problème ludique sur des timbres. Puis étudiés par Weierstrass, Hurwitz, Frobenius, Apéry, etc.

Application I. Semigroupes numériques

Définitions équivalentes des **semigroupes numériques** $S \subseteq \mathbb{N}$:

1. Comme sous-monoïdes cofinis de $\mathbb{N}$ ($0 \in S$, $S + S \subseteq S$, $\mathbb{N} \setminus S$ fini)
2. $S = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = a_1\mathbb{N} + \cdots + a_n\mathbb{N}$ où $\mathrm{pgcd}(a_1, \ldots, a_n) = 1$

▷ Exemple typique : $S = \langle 4, 7, 9 \rangle = 4\mathbb{N} + 7\mathbb{N} + 9\mathbb{N}$: toutes les combinaisons linéaires de $4, 7, 9$ à coefficients dans $\mathbb{N}$.

▷ Inventés par Sylvester en 1884, comme problème ludique sur des timbres. Puis étudiés par Weierstrass, Hurwitz, Frobenius, Apéry, etc.

▷ Interviennent en algèbre, géométrie algébrique, combinatoire, théorie des nombres, théorie des codes, etc.

Application I. Semigroupes numériques

Définitions équivalentes des **semigroupes numériques** $S \subseteq \mathbb{N}$:

1. Comme sous-monoïdes cofinis de $\mathbb{N}$ ($0 \in S$, $S + S \subseteq S$, $\mathbb{N} \setminus S$ fini)
2. $S = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = a_1\mathbb{N} + \cdots + a_n\mathbb{N}$ où $\mathrm{pgcd}(a_1, \ldots, a_n) = 1$

▷ Exemple typique : $S = \langle 4, 7, 9 \rangle = 4\mathbb{N} + 7\mathbb{N} + 9\mathbb{N}$: toutes les combinaisons linéaires de $4, 7, 9$ à coefficients dans $\mathbb{N}$.

▷ Inventés par Sylvester en 1884, comme problème ludique sur des timbres. Puis étudiés par Weierstrass, Hurwitz, Frobenius, Apéry, etc.

▷ Interviennent en algèbre, géométrie algébrique, combinatoire, théorie des nombres, théorie des codes, etc.

▷ Malgré une définition élémentaire, objet de nombreux problèmes ouverts.

Application I. Semigroupes numériques

Définitions équivalentes des **semigroupes numériques** $S \subseteq \mathbb{N}$:

1. Comme sous-monoïdes cofinis de $\mathbb{N}$ ($0 \in S$, $S + S \subseteq S$, $\mathbb{N} \setminus S$ fini)
2. $S = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = a_1\mathbb{N} + \cdots + a_n\mathbb{N}$ où $\mathrm{pgcd}(a_1, \ldots, a_n) = 1$

▷ Exemple typique : $S = \langle 4, 7, 9 \rangle = 4\mathbb{N} + 7\mathbb{N} + 9\mathbb{N}$: toutes les combinaisons linéaires de $4, 7, 9$ à coefficients dans $\mathbb{N}$.

▷ Inventés par Sylvester en 1884, comme problème ludique sur des timbres. Puis étudiés par Weierstrass, Hurwitz, Frobenius, Apéry, etc.

▷ Interviennent en algèbre, géométrie algébrique, combinatoire, théorie des nombres, théorie des codes, etc.

▷ Malgré une définition élémentaire, objet de nombreux problèmes ouverts. Parmi ceux-ci, la conjecture de Wilf.

Application I. Semigroupes numériques

Définitions équivalentes des **semigroupes numériques** $S \subseteq \mathbb{N}$:

1. Comme sous-monoïdes cofinis de $\mathbb{N}$ ($0 \in S$, $S + S \subseteq S$, $\mathbb{N} \setminus S$ fini)
2. $S = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = a_1\mathbb{N} + \cdots + a_n\mathbb{N}$ où $\mathrm{pgcd}(a_1, \ldots, a_n) = 1$

▷ Exemple typique : $S = \langle 4, 7, 9 \rangle = 4\mathbb{N} + 7\mathbb{N} + 9\mathbb{N}$: toutes les combinaisons linéaires de $4, 7, 9$ à coefficients dans $\mathbb{N}$.

▷ Inventés par Sylvester en 1884, comme problème ludique sur des timbres. Puis étudiés par Weierstrass, Hurwitz, Frobenius, Apéry, etc.

▷ Interviennent en algèbre, géométrie algébrique, combinatoire, théorie des nombres, théorie des codes, etc.

▷ Malgré une définition élémentaire, objet de nombreux problèmes ouverts. Parmi ceux-ci, la conjecture de Wilf.

Terminologie

Terminologie

- $F = \max(\mathbb{Z} \setminus S)$, le **nombre de Frobenius**, i.e. **plus grand trou**

Terminologie

- $F = \max(\mathbb{Z} \setminus S)$, le **nombre de Frobenius**, i.e. **plus grand trou**
- $c = F + 1$ le **conducteur**, i.e. c minimal tel que $c + \mathbb{N} \subseteq S$

Terminologie

- $F = \max(\mathbb{Z} \setminus S)$, le **nombre de Frobenius**, i.e. **plus grand trou**
- $c = F + 1$ le **conducteur**, i.e. c minimal tel que $c + \mathbb{N} \subseteq S$
- $m = \min(S^*)$, la **multiplicité**, où $S^* = S \setminus \{0\}$

Terminologie

- $F = \max(\mathbb{Z} \setminus S)$, le **nombre de Frobenius**, i.e. **plus grand trou**
- $c = F + 1$ le **conducteur**, i.e. c minimal tel que $c + \mathbb{N} \subseteq S$
- $m = \min(S^*)$, la **multiplicité**, où $S^* = S \setminus \{0\}$
- $P = S^* \setminus (S^* + S^*)$, les **primitifs** ou **générateurs minimaux**

Terminologie

- $F = \max(\mathbb{Z} \setminus S)$, le **nombre de Frobenius**, i.e. **plus grand trou**
- $c = F + 1$ le **conducteur**, i.e. c minimal tel que $c + \mathbb{N} \subseteq S$
- $m = \min(S^*)$, la **multiplicité**, où $S^* = S \setminus \{0\}$
- $P = S^* \setminus (S^* + S^*)$, les **primitifs** ou **générateurs minimaux**
- $L = S \cap [0, c-1]$, la **partie gauche**

Terminologie

- $F = \max(\mathbb{Z} \setminus S)$, le **nombre de Frobenius**, i.e. **plus grand trou**
- $c = F + 1$ le **conducteur**, i.e. c minimal tel que $c + \mathbb{N} \subseteq S$
- $m = \min(S^*)$, la **multiplicité**, où $S^* = S \setminus \{0\}$
- $P = S^* \setminus (S^* + S^*)$, les **primitifs** ou **générateurs minimaux**
- $L = S \cap [0, c-1]$, la **partie gauche**
- $g = |\mathbb{N} \setminus S|$, le **genre**, i.e. nombre de **trous**

Terminologie

- $F = \max(\mathbb{Z} \setminus S)$, le **nombre de Frobenius**, i.e. **plus grand trou**
- $c = F + 1$ le **conducteur**, i.e. c minimal tel que $c + \mathbb{N} \subseteq S$
- $m = \min(S^*)$, la **multiplicité**, où $S^* = S \setminus \{0\}$
- $P = S^* \setminus (S^* + S^*)$, les **primitifs** ou **générateurs minimaux**
- $L = S \cap [0, c-1]$, la **partie gauche**
- $g = |\mathbb{N} \setminus S|$, le **genre**, i.e. nombre de **trous**

Conjecture (Wilf 1978)

Terminologie

- $F = \max(\mathbb{Z} \setminus S)$, le **nombre de Frobenius**, i.e. **plus grand trou**
- $c = F + 1$ le **conducteur**, i.e. c minimal tel que $c + \mathbb{N} \subseteq S$
- $m = \min(S^*)$, la **multiplicité**, où $S^* = S \setminus \{0\}$
- $P = S^* \setminus (S^* + S^*)$, les **primitifs** ou **générateurs minimaux**
- $L = S \cap [0, c-1]$, la **partie gauche**
- $g = |\mathbb{N} \setminus S|$, le **genre**, i.e. nombre de **trous**

Conjecture (Wilf 1978)

Soit S un semigroupe numérique.

Terminologie

- $F = \max(\mathbb{Z} \setminus S)$, le **nombre de Frobenius**, i.e. **plus grand trou**
- $c = F + 1$ le **conducteur**, i.e. c minimal tel que $c + \mathbb{N} \subseteq S$
- $m = \min(S^*)$, la **multiplicité**, où $S^* = S \setminus \{0\}$
- $P = S^* \setminus (S^* + S^*)$, les **primitifs** ou **générateurs minimaux**
- $L = S \cap [0, c-1]$, la **partie gauche**
- $g = |\mathbb{N} \setminus S|$, le **genre**, i.e. nombre de **trous**

Conjecture (Wilf 1978)

Soit S un semigroupe numérique. Alors $|P||L| \geq c$.

Terminologie

- $F = \max(\mathbb{Z} \setminus S)$, le **nombre de Frobenius**, i.e. **plus grand trou**
- $c = F + 1$ le **conducteur**, i.e. c minimal tel que $c + \mathbb{N} \subseteq S$
- $m = \min(S^*)$, la **multiplicité**, où $S^* = S \setminus \{0\}$
- $P = S^* \setminus (S^* + S^*)$, les **primitifs** ou **générateurs minimaux**
- $L = S \cap [0, c-1]$, la **partie gauche**
- $g = |\mathbb{N} \setminus S|$, le **genre**, i.e. nombre de **trous**

Conjecture (Wilf 1978)

Soit S un semigroupe numérique. Alors $|P||L| \geq c$.

Théorème (Sylvester 1884)

Terminologie

- $F = \max(\mathbb{Z} \setminus S)$, le **nombre de Frobenius**, i.e. **plus grand trou**
- $c = F + 1$ le **conducteur**, i.e. c minimal tel que $c + \mathbb{N} \subseteq S$
- $m = \min(S^*)$, la **multiplicité**, où $S^* = S \setminus \{0\}$
- $P = S^* \setminus (S^* + S^*)$, les **primitifs** ou **générateurs minimaux**
- $L = S \cap [0, c-1]$, la **partie gauche**
- $g = |\mathbb{N} \setminus S|$, le **genre**, i.e. nombre de **trous**

Conjecture (Wilf 1978)

Soit S un semigroupe numérique. Alors $|P||L| \geq c$.

Théorème (Sylvester 1884)

Vrai pour $|P| = 2$, i.e. pour $S = \langle a, b \rangle$.

Terminologie

- $F = \max(\mathbb{Z} \setminus S)$, le **nombre de Frobenius**, i.e. **plus grand trou**
- $c = F + 1$ le **conducteur**, i.e. c minimal tel que $c + \mathbb{N} \subseteq S$
- $m = \min(S^*)$, la **multiplicité**, où $S^* = S \setminus \{0\}$
- $P = S^* \setminus (S^* + S^*)$, les **primitifs** ou **générateurs minimaux**
- $L = S \cap [0, c-1]$, la **partie gauche**
- $g = |\mathbb{N} \setminus S|$, le **genre**, i.e. nombre de **trous**

Conjecture (Wilf 1978)

Soit S un semigroupe numérique. Alors $|P||L| \geq c$.

Théorème (Sylvester 1884)

Vrai pour $|P| = 2$, i.e. pour $S = \langle a, b \rangle$. En fait, $2|L| = c$.

Terminologie

- $F = \max(\mathbb{Z} \setminus S)$, le **nombre de Frobenius**, i.e. **plus grand trou**
- $c = F + 1$ le **conducteur**, i.e. c minimal tel que $c + \mathbb{N} \subseteq S$
- $m = \min(S^*)$, la **multiplicité**, où $S^* = S \setminus \{0\}$
- $P = S^* \setminus (S^* + S^*)$, les **primitifs** ou **générateurs minimaux**
- $L = S \cap [0, c-1]$, la **partie gauche**
- $g = |\mathbb{N} \setminus S|$, le **genre**, i.e. nombre de **trous**

Conjecture (Wilf 1978)

Soit S un semigroupe numérique. Alors $|P||L| \geq c$.

Théorème (Sylvester 1884)

Vrai pour $|P| = 2$, i.e. pour $S = \langle a, b \rangle$. En fait, $2|L| = c$.

Etat de l'art (2022)

Etat de l'art (2022)

Frontières actuelles connues de validité de la conjecture de Wilf :

Etat de l'art (2022)

Frontières actuelles connues de validité de la conjecture de Wilf :

- $|P| = 3$, par **combinatoire et algèbre** [Fröberg *et al.* 1987]

Etat de l'art (2022)

Frontières actuelles connues de validité de la conjecture de Wilf :

- $|P| = 3$, par **combinatoire et algèbre** [Fröberg *et al.* 1987]
- $g \leq 66$, par **machine** [Brás-Amoros & Marín-Rodríguez 2022]

Etat de l'art (2022)

Frontières actuelles connues de validité de la conjecture de Wilf :

- $|P| = 3$, par **combinatoire et algèbre** [Fröberg *et al.* 1987]
- $g \leq 66$, par **machine** [Brás-Amoros & Marín-Rodríguez 2022]
- $c \leq 3m$, avec le **théorème de Macaulay** [E. 2018]

Etat de l'art (2022)

Frontières actuelles connues de validité de la conjecture de Wilf :

- $|P| = 3$, par **combinatoire et algèbre** [Fröberg *et al.* 1987]
- $g \leq 66$, par **machine** [Brás-Amoros & Marín-Rodríguez 2022]
- $c \leq 3m$, avec le **théorème de Macaulay** [E. 2018]
- $|P| \geq m/3$, par **théorie des graphes** [E. 2020]

Etat de l'art (2022)

Frontières actuelles connues de validité de la conjecture de Wilf :

- $|P| = 3$, par **combinatoire et algèbre** [Fröberg *et al.* 1987]
- $g \leq 66$, par **machine** [Brás-Amoros & Marín-Rodríguez 2022]
- $c \leq 3m$, avec le **théorème de Macaulay** [E. 2018]
- $|P| \geq m/3$, par **théorie des graphes** [E. 2020]
- $m \leq 18$, par **théorie et machine** [García-Sánchez *et al.* 2020]

Etat de l'art (2022)

Frontières actuelles connues de validité de la conjecture de Wilf :

- $|P| = 3$, par **combinatoire et algèbre** [Fröberg *et al.* 1987]
- $g \leq 66$, par **machine** [Brás-Amoros & Marín-Rodríguez 2022]
- $c \leq 3m$, avec le **théorème de Macaulay** [E. 2018]
- $|P| \geq m/3$, par **théorie des graphes** [E. 2020]
- $m \leq 18$, par **théorie et machine** [García-Sánchez *et al.* 2020]
- $|L| \leq 12$, par **combinatoire et algèbre** [E. & Marín-Aragón 2021]

Etat de l'art (2022)

Frontières actuelles connues de validité de la conjecture de Wilf :

- $|P| = 3$, par **combinatoire et algèbre** [Fröberg *et al.* 1987]
- $g \leq 66$, par **machine** [Brás-Amoros & Marín-Rodríguez 2022]
- $c \leq 3m$, avec le **théorème de Macaulay** [E. 2018]
- $|P| \geq m/3$, par **théorie des graphes** [E. 2020]
- $m \leq 18$, par **théorie et machine** [García-Sánchez *et al.* 2020]
- $|L| \leq 12$, par **combinatoire et algèbre** [E. & Marín-Aragón 2021]

Théorème (Zhai 2013)

Etat de l'art (2022)

Frontières actuelles connues de validité de la conjecture de Wilf :

- $|P| = 3$, par **combinatoire et algèbre** [Fröberg *et al.* 1987]
- $g \leq 66$, par **machine** [Brás-Amoros & Marín-Rodríguez 2022]
- $c \leq 3m$, avec le **théorème de Macaulay** [E. 2018]
- $|P| \geq m/3$, par **théorie des graphes** [E. 2020]
- $m \leq 18$, par **théorie et machine** [García-Sánchez *et al.* 2020]
- $|L| \leq 12$, par **combinatoire et algèbre** [E. & Marín-Aragón 2021]

Théorème (Zhai 2013)

Asymptotiquement, tous les semigroupes numériques satisfont $c \leq 3m$.

Etat de l'art (2022)

Frontières actuelles connues de validité de la conjecture de Wilf :

- $|P| = 3$, par **combinatoire et algèbre** [Fröberg *et al.* 1987]
- $g \leq 66$, par **machine** [Brás-Amoros & Marín-Rodríguez 2022]
- $c \leq 3m$, avec le **théorème de Macaulay** [E. 2018]
- $|P| \geq m/3$, par **théorie des graphes** [E. 2020]
- $m \leq 18$, par **théorie et machine** [García-Sánchez *et al.* 2020]
- $|L| \leq 12$, par **combinatoire et algèbre** [E. & Marín-Aragón 2021]

Théorème (Zhai 2013)

Asymptotiquement, tous les semigroupes numériques satisfont $c \leq 3m$.

Le cas $c \leq 3m$ est parfois appelé générique.

Etat de l'art (2022)

Frontières actuelles connues de validité de la conjecture de Wilf :

- $|P| = 3$, par **combinatoire et algèbre** [Fröberg *et al.* 1987]
- $g \leq 66$, par **machine** [Brás-Amoros & Marín-Rodríguez 2022]
- $c \leq 3m$, avec le **théorème de Macaulay** [E. 2018]
- $|P| \geq m/3$, par **théorie des graphes** [E. 2020]
- $m \leq 18$, par **théorie et machine** [García-Sánchez *et al.* 2020]
- $|L| \leq 12$, par **combinatoire et algèbre** [E. & Marín-Aragón 2021]

Théorème (Zhai 2013)

Asymptotiquement, tous les semigroupes numériques satisfont $c \leq 3m$.

Le cas $c \leq 3m$ est parfois appelé générique.

Théorème (E. 2018)

Théorème (E. 2018)

La conjecture de Wilf est satisfaite dans le cas générique $c \leq 3m$.

Théorème (E. 2018)

La conjecture de Wilf est satisfaite dans le cas générique $c \leq 3m$. Elle est donc asymptotiquement vraie pour $g \to \infty$.

Théorème (E. 2018)

La conjecture de Wilf est satisfaite dans le cas générique $c \leq 3m$. Elle est donc asymptotiquement vraie pour $g \to \infty$.

Idées de preuve

Théorème (E. 2018)

La conjecture de Wilf est satisfaite dans le cas générique $c \leq 3m$. Elle est donc asymptotiquement vraie pour $g \to \infty$.

Idées de preuve

▷ Pour simplifier, on suppose $c = qm$ avec $q \in \mathbb{N}$. On a $q \leq 3$.

Théorème (E. 2018)

La conjecture de Wilf est satisfaite dans le cas générique $c \leq 3m$. Elle est donc asymptotiquement vraie pour $g \to \infty$.

Idées de preuve

- ▷ Pour simplifier, on suppose $c = qm$ avec $q \in \mathbb{N}$. On a $q \leq 3$.
- ▷ Soit $A = S \setminus (m + S)$ **l'ensemble d'Apéry** de S par rapport à m.

Théorème (E. 2018)

La conjecture de Wilf est satisfaite dans le cas générique $c \leq 3m$. Elle est donc asymptotiquement vraie pour $g \to \infty$.

Idées de preuve

▷ Pour simplifier, on suppose $c = qm$ avec $q \in \mathbb{N}$. On a $q \leq 3$.

▷ Soit $A = S \setminus (m + S)$ **l'ensemble d'Apéry** de S par rapport à m.

▷ Notons $A_i = A \cap [im, im + m - 1]$ pour $i \geq 1$.

Théorème (E. 2018)

La conjecture de Wilf est satisfaite dans le cas générique $c \leq 3m$. Elle est donc asymptotiquement vraie pour $g \to \infty$.

Idées de preuve

▷ Pour simplifier, on suppose $c = qm$ avec $q \in \mathbb{N}$. On a $q \leq 3$.

▷ Soit $A = S \setminus (m + S)$ **l'ensemble d'Apéry** de S par rapport à m.

▷ Notons $A_i = A \cap [im, im + m - 1]$ pour $i \geq 1$.

▷ L'hypothèse entraîne $A_i = \emptyset$ pour $i \geq 4$.

Théorème (E. 2018)

La conjecture de Wilf est satisfaite dans le cas générique $c \leq 3m$. Elle est donc asymptotiquement vraie pour $g \to \infty$.

Idées de preuve

- ▷ Pour simplifier, on suppose $c = qm$ avec $q \in \mathbb{N}$. On a $q \leq 3$.
- ▷ Soit $A = S \setminus (m + S)$ **l'ensemble d'Apéry** de S par rapport à m.
- ▷ Notons $A_i = A \cap [im, im + m - 1]$ pour $i \geq 1$.
- ▷ L'hypothèse entraîne $A_i = \emptyset$ pour $i \geq 4$.
- ▷ Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|2A_1 \cap A_2| = \binom{x}{2}$.

Théorème (E. 2018)

La conjecture de Wilf est satisfaite dans le cas générique $c \leq 3m$. Elle est donc asymptotiquement vraie pour $g \to \infty$.

Idées de preuve

▷ Pour simplifier, on suppose $c = qm$ avec $q \in \mathbb{N}$. On a $q \leq 3$.

▷ Soit $A = S \setminus (m + S)$ **l'ensemble d'Apéry** de S par rapport à m.

▷ Notons $A_i = A \cap [im, im + m - 1]$ pour $i \geq 1$.

▷ L'hypothèse entraîne $A_i = \emptyset$ pour $i \geq 4$.

▷ Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|2A_1 \cap A_2| = \binom{x}{2}$.

▷ Macaulay condensé implique $|3A_1 \cap A_3| \leq \binom{x+1}{3}$.

Théorème (E. 2018)

La conjecture de Wilf est satisfaite dans le cas générique $c \leq 3m$. Elle est donc asymptotiquement vraie pour $g \to \infty$.

Idées de preuve

- ▷ Pour simplifier, on suppose $c = qm$ avec $q \in \mathbb{N}$. On a $q \leq 3$.
- ▷ Soit $A = S \setminus (m + S)$ **l'ensemble d'Apéry** de S par rapport à m.
- ▷ Notons $A_i = A \cap [im, im + m - 1]$ pour $i \geq 1$.
- ▷ L'hypothèse entraîne $A_i = \emptyset$ pour $i \geq 4$.
- ▷ Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|2A_1 \cap A_2| = \binom{x}{2}$.
- ▷ Macaulay condensé implique $|3A_1 \cap A_3| \leq \binom{x+1}{3}$.
- ▷ Ce qui entraîne [. . .]

Théorème (E. 2018)

La conjecture de Wilf est satisfaite dans le cas générique $c \leq 3m$. Elle est donc asymptotiquement vraie pour $g \to \infty$.

Idées de preuve

- ▷ Pour simplifier, on suppose $c = qm$ avec $q \in \mathbb{N}$. On a $q \leq 3$.
- ▷ Soit $A = S \setminus (m + S)$ **l'ensemble d'Apéry** de S par rapport à m.
- ▷ Notons $A_i = A \cap [im, im + m - 1]$ pour $i \geq 1$.
- ▷ L'hypothèse entraîne $A_i = \emptyset$ pour $i \geq 4$.
- ▷ Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|2A_1 \cap A_2| = \binom{x}{2}$.
- ▷ Macaulay condensé implique $|3A_1 \cap A_3| \leq \binom{x+1}{3}$.
- ▷ Ce qui entraîne [...] $|P||L| \geq c$, comme voulu. □

Théorème (E. 2018)

La conjecture de Wilf est satisfaite dans le cas générique $c \leq 3m$. Elle est donc asymptotiquement vraie pour $g \to \infty$.

Idées de preuve

- ▷ Pour simplifier, on suppose $c = qm$ avec $q \in \mathbb{N}$. On a $q \leq 3$.
- ▷ Soit $A = S \setminus (m + S)$ **l'ensemble d'Apéry** de S par rapport à m.
- ▷ Notons $A_i = A \cap [im, im + m - 1]$ pour $i \geq 1$.
- ▷ L'hypothèse entraîne $A_i = \emptyset$ pour $i \geq 4$.
- ▷ Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|2A_1 \cap A_2| = \binom{x}{2}$.
- ▷ Macaulay condensé implique $|3A_1 \cap A_3| \leq \binom{x+1}{3}$.
- ▷ Ce qui entraîne [...] $|P||L| \geq c$, comme voulu. $\square$

Application II. Sommes itérées d'ensembles

Application II. Sommes itérées d’ensembles

[Avec Eshita Mazumdar, 2022]

Application II. Sommes itérées d'ensembles

[Avec Eshita Mazumdar, 2022]

Soit G un groupe ou semigroupe abélien. Soit $A \subseteq G$ fini.

Application II. Sommes itérées d'ensembles

[Avec Eshita Mazumdar, 2022]

Soit G un groupe ou semigroupe abélien. Soit $A \subseteq G$ fini. Pour $h \geq 1$, posons

$$hA = A + (h-1)A = \underbrace{A + \cdots + A}_{h},$$

la **somme itérée** h-fois de A.

Application II. Sommes itérées d'ensembles

[Avec Eshita Mazumdar, 2022]

Soit G un groupe ou semigroupe abélien. Soit $A \subseteq G$ fini. Pour $h \geq 1$, posons

$$hA = A + (h-1)A = \underbrace{A + \cdots + A}_{h},$$

la **somme itérée** h-fois de A.

Problème

Comment la suite $|hA|$ croît-elle avec h ?

Application II. Sommes itérées d'ensembles

[Avec Eshita Mazumdar, 2022]

Soit G un groupe ou semigroupe abélien. Soit $A \subseteq G$ fini. Pour $h \geq 1$, posons

$$hA = A + (h-1)A = \underbrace{A + \cdots + A}_{h},$$

la **somme itérée** h-fois de A.

Problème

Comment la suite $|hA|$ croît-elle avec h ?

Théorème (Plünnecke 1970)

Soit A sous-ensemble fini non-vide d'un groupe abélien. Soit $h \geq 1$. Alors $|hA| \leq |iA|^{h/i}$ pour tout $1 \leq i \leq h$.

Application II. Sommes itérées d'ensembles

[Avec Eshita Mazumdar, 2022]

Soit G un groupe ou semigroupe abélien. Soit $A \subseteq G$ fini. Pour $h \geq 1$, posons

$$hA = A + (h-1)A = \underbrace{A + \cdots + A}_{h},$$

la **somme itérée** h-fois de A.

Problème

Comment la suite $|hA|$ croît-elle avec h ?

Théorème (Plünnecke 1970)

Soit A sous-ensemble fini non-vide d'un groupe abélien. Soit $h \geq 1$. Alors $|hA| \leq |iA|^{h/i}$ pour tout $1 \leq i \leq h$.

Remarque

Remarque

Ces inégalités sont équivalentes au cas principal $i = h - 1$, i.e.

$$|hA| \leq |(h-1)A|^{h/(h-1)} \text{ ou } |(h-1)A| \geq |hA|^{(h-1)/h}.$$

Remarque

Ces inégalités sont équivalentes au cas principal $i = h-1$, i.e.

$$|hA| \leq |(h-1)A|^{h/(h-1)} \text{ ou } |(h-1)A| \geq |hA|^{(h-1)/h}.$$

Preuve originale de Plünnecke via la théorie des graphes.

Remarque

Ces inégalités sont équivalentes au cas principal $i = h-1$, i.e.

$$|hA| \leq |(h-1)A|^{h/(h-1)} \text{ ou } |(h-1)A| \geq |hA|^{(h-1)/h}.$$

Preuve originale de Plünnecke via la théorie des graphes.

Exemple

Remarque

Ces inégalités sont équivalentes au cas principal $i = h-1$, i.e.

$$|hA| \leq |(h-1)A|^{h/(h-1)} \text{ ou } |(h-1)A| \geq |hA|^{(h-1)/h}.$$

Preuve originale de Plünnecke via la théorie des graphes.

Exemple

Soit $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$.

Remarque

Ces inégalités sont équivalentes au cas principal $i = h-1$, i.e.

$$|hA| \leq |(h-1)A|^{h/(h-1)} \text{ ou } |(h-1)A| \geq |hA|^{(h-1)/h}.$$

Preuve originale de Plünnecke via la théorie des graphes.

Exemple

Soit $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$. Dans ce cas, l'inégalité de Plünnecke donne $|hA| \leq |2A|^{h/2} = 100^{h/2}$ pour tout $h \geq 2$.

Remarque

Ces inégalités sont équivalentes au cas principal $i = h - 1$, i.e.

$$|hA| \leq |(h-1)A|^{h/(h-1)} \text{ ou } |(h-1)A| \geq |hA|^{(h-1)/h}.$$

Preuve originale de Plünnecke via la théorie des graphes.

Exemple

Soit $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$. Dans ce cas, l'inégalité de Plünnecke donne $|hA| \leq |2A|^{h/2} = 100^{h/2}$ pour tout $h \geq 2$. En particulier,

$$\begin{aligned} |3A| &\leq 100^{3/2} = 10^3 \\ |4A| &\leq 10^4 \\ |5A| &\leq 10^5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Remarque

Ces inégalités sont équivalentes au cas principal $i = h-1$, i.e.

$$|hA| \leq |(h-1)A|^{h/(h-1)} \text{ ou } |(h-1)A| \geq |hA|^{(h-1)/h}.$$

Preuve originale de Plünnecke via la théorie des graphes.

Exemple

Soit $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$. Dans ce cas, l'inégalité de Plünnecke donne $|hA| \leq |2A|^{h/2} = 100^{h/2}$ pour tout $h \geq 2$. En particulier,

$$|3A| \leq 100^{3/2} = 10^3$$
$$|4A| \leq 10^4$$
$$|5A| \leq 10^5$$
$$\vdots$$

Amélioration

Amélioration

Notation

Amélioration

Notation

Pour $h \geq 1$ et $x \geq h$, posons $\theta(x,h) = \dfrac{h}{x}\dbinom{x}{h}^{1/h}$.

Amélioration

Notation

Pour $h \geq 1$ et $x \geq h$, posons $\theta(x,h) = \frac{h}{x}\binom{x}{h}^{1/h}$.

Théorème (E.-Mazumdar 2022)

Amélioration

Notation

Pour $h \geq 1$ et $x \geq h$, posons $\theta(x,h) = \frac{h}{x}\binom{x}{h}^{1/h}$.

Théorème (E.-Mazumdar 2022)

Soit G groupe abélien et $A \subset G$ fini. Soit $h \geq 2$.

Amélioration

Notation

Pour $h \geq 1$ et $x \geq h$, posons $\theta(x,h) = \frac{h}{x}\binom{x}{h}^{1/h}$.

Théorème (E.-Mazumdar 2022)

Soit G groupe abélien et $A \subset G$ fini. Soit $h \geq 2$. Alors

$$|(h-1)A| \geq \theta(x,h)|hA|^{(h-1)/h}$$

où $x \in \mathbb{R}$, $x \geq h$ satisfait $\binom{x}{h} = |hA|$.

Amélioration

Notation

Pour $h \geq 1$ et $x \geq h$, posons $\theta(x,h) = \frac{h}{x}\binom{x}{h}^{1/h}$.

Théorème (E.-Mazumdar 2022)

Soit G groupe abélien et $A \subset G$ fini. Soit $h \geq 2$. Alors

$$|(h-1)A| \geq \theta(x,h)|hA|^{(h-1)/h}$$

où $x \in \mathbb{R}$, $x \geq h$ satisfait $\binom{x}{h} = |hA|$. De plus, $1 < \theta(x,h) < e$.

Amélioration

Notation

Pour $h \geq 1$ et $x \geq h$, posons $\theta(x,h) = \frac{h}{x}\binom{x}{h}^{1/h}$.

Théorème (E.-Mazumdar 2022)

Soit G groupe abélien et $A \subset G$ fini. Soit $h \geq 2$. Alors

$$|(h-1)A| \geq \theta(x,h)|hA|^{(h-1)/h}$$

où $x \in \mathbb{R}$, $x \geq h$ satisfait $\binom{x}{h} = |hA|$. De plus, $1 < \theta(x,h) < e$.

Preuve

Preuve

Macaulay condensé implique $|(h-1)A| \geq \binom{x-1}{h-1}$.

Preuve

Macaulay condensé implique $|(h-1)A| \geq \binom{x-1}{h-1}$. On a

$$\binom{x}{h} = \prod_{i=0}^{h-1} \frac{x-i}{h-i} = \frac{x}{h} \prod_{i=1}^{h-1} \frac{x-i}{h-i} = \frac{x}{h}\binom{x-1}{h-1}.$$

Preuve

Macaulay condensé implique $|(h-1)A| \geq \binom{x-1}{h-1}$. On a

$$\binom{x}{h} = \prod_{i=0}^{h-1} \frac{x-i}{h-i} = \frac{x}{h} \prod_{i=1}^{h-1} \frac{x-i}{h-i} = \frac{x}{h}\binom{x-1}{h-1}.$$

Il suit que

$$\begin{aligned} |(h-1)A|^h &\geq \binom{x-1}{h-1}^h \\ &= \left(\frac{h}{x}\right)^h \binom{x}{h}^h \\ &= \left(\frac{h}{x}\right)^h \binom{x}{h} \binom{x}{h}^{h-1} \\ &= \theta(x,h)^h |hA|^{h-1}. \end{aligned}$$

Preuve

Macaulay condensé implique $|(h-1)A| \geq \binom{x-1}{h-1}$. On a

$$\binom{x}{h} = \prod_{i=0}^{h-1} \frac{x-i}{h-i} = \frac{x}{h} \prod_{i=1}^{h-1} \frac{x-i}{h-i} = \frac{x}{h} \binom{x-1}{h-1}.$$

Il suit que

$$\begin{aligned} |(h-1)A|^h &\geq \binom{x-1}{h-1}^h \\ &= \left(\frac{h}{x}\right)^h \binom{x}{h}^h \\ &= \left(\frac{h}{x}\right)^h \binom{x}{h} \binom{x}{h}^{h-1} \\ &= \theta(x,h)^h |hA|^{h-1}. \end{aligned}$$

D'où $|(h-1)A| \geq \theta(x,h)|hA|^{(h-1)/h}$, comme souhaité. □

Preuve

Macaulay condensé implique $|(h-1)A| \geq \binom{x-1}{h-1}$. On a

$$\binom{x}{h} = \prod_{i=0}^{h-1} \frac{x-i}{h-i} = \frac{x}{h} \prod_{i=1}^{h-1} \frac{x-i}{h-i} = \frac{x}{h}\binom{x-1}{h-1}.$$

Il suit que

$$\begin{aligned} |(h-1)A|^h &\geq \binom{x-1}{h-1}^h \\ &= \left(\frac{h}{x}\right)^h \binom{x}{h}^h \\ &= \left(\frac{h}{x}\right)^h \binom{x}{h} \binom{x}{h}^{h-1} \\ &= \theta(x,h)^h |hA|^{h-1}. \end{aligned}$$

D'où $|(h-1)A| \geq \theta(x,h)|hA|^{(h-1)/h}$, comme souhaité. $\square$

Forme de $\theta(x, h)$ pour $h \leq x$

Forme de $\theta(x,h)$ pour $h \leq x$

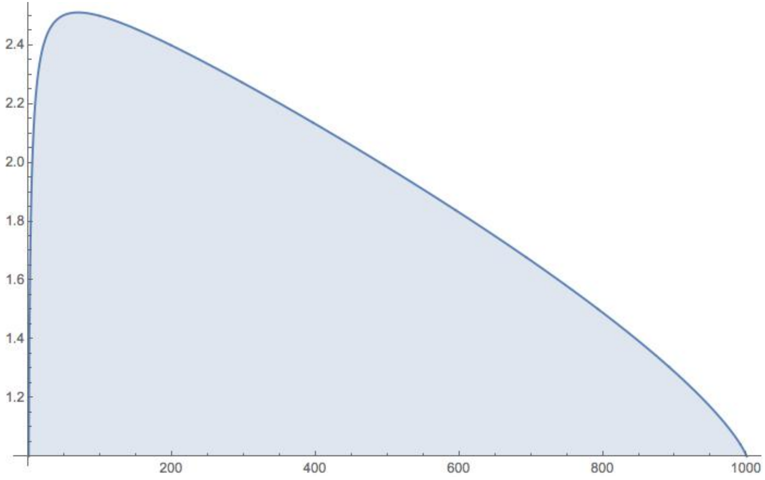

Figure: $\theta(1000,h)$ pour $h = 1,\ldots,1000$

Forme de $\theta(x, h)$ pour $h \leq x$

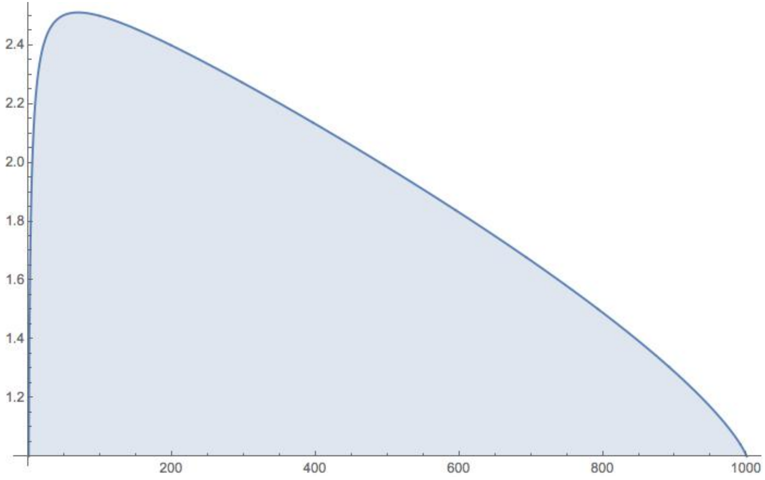

Figure: $\theta(1000, h)$ pour $h = 1, \ldots, 1000$

Théorème (E.-Mazumdar 2022)

Théorème (E.-Mazumdar 2022)

Soit $(G, +)$ *un groupe abélien.*

Théorème (E.-Mazumdar 2022)

Soit $(G, +)$ un groupe abélien. Soit $A \subseteq G$ fini non vide.

Théorème (E.-Mazumdar 2022)

Soit $(G,+)$ *un groupe abélien. Soit* $A \subseteq G$ *fini non vide. Alors pour tout* $h \geq 1$*, on a*

$$|(h+1)A| \leq |hA|^{\langle h \rangle}.$$

Théorème (E.-Mazumdar 2022)

Soit $(G,+)$ *un groupe abélien. Soit* $A \subseteq G$ *fini non vide. Alors pour tout* $h \geq 1$*, on a*

$$|(h+1)A| \leq |hA|^{\langle h \rangle}.$$

Preuve

Théorème (E.-Mazumdar 2022)

Soit $(G,+)$ *un groupe abélien. Soit* $A \subseteq G$ *fini non vide. Alors pour tout* $h \geq 1$*, on a*

$$|(h+1)A| \leq |hA|^{\langle h \rangle}.$$

Preuve

Soit $R = R(A) = \oplus_{h \geq 0} R_h$ l'algèbre associée.

Théorème (E.-Mazumdar 2022)

Soit $(G,+)$ *un groupe abélien. Soit* $A \subseteq G$ *fini non vide. Alors pour tout* $h \geq 1$*, on a*

$$|(h+1)A| \leq |hA|^{\langle h \rangle}.$$

Preuve

Soit $R = R(A) = \oplus_{h \geq 0} R_h$ l'algèbre associée. On a $|hA| = \dim R_h$ pour tout $h \geq 0$.

Théorème (E.-Mazumdar 2022)

Soit $(G,+)$ un groupe abélien. Soit $A \subseteq G$ fini non vide. Alors pour tout $h \geq 1$, on a

$$|(h+1)A| \leq |hA|^{\langle h \rangle}.$$

Preuve

Soit $R = R(A) = \oplus_{h \geq 0} R_h$ l'algèbre associée. On a $|hA| = \dim R_h$ pour tout $h \geq 0$. Le théorème de Macaulay donne

$$\dim R_{h+1} \leq (\dim R_h)^{\langle h \rangle}.$$

Théorème (E.-Mazumdar 2022)

Soit $(G,+)$ un groupe abélien. Soit $A \subseteq G$ fini non vide. Alors pour tout $h \geq 1$, on a

$$|(h+1)A| \leq |hA|^{\langle h \rangle}.$$

Preuve

Soit $R = R(A) = \oplus_{h \geq 0} R_h$ l'algèbre associée. On a $|hA| = \dim R_h$ pour tout $h \geq 0$. Le théorème de Macaulay donne

$$\dim R_{h+1} \leq (\dim R_h)^{\langle h \rangle}.$$

D'où l'inégalité annoncée. $\square$

Théorème (E.-Mazumdar 2022)

Soit $(G,+)$ *un groupe abélien. Soit* $A \subseteq G$ *fini non vide. Alors pour tout* $h \geq 1$*, on a*

$$|(h+1)A| \leq |hA|^{\langle h \rangle}.$$

Preuve

Soit $R = R(A) = \oplus_{h \geq 0} R_h$ l'algèbre associée. On a $|hA| = \dim R_h$ pour tout $h \geq 0$. Le théorème de Macaulay donne

$$\dim R_{h+1} \leq (\dim R_h)^{\langle h \rangle}.$$

D'où l'inégalité annoncée. □

Exemple 1

Exemple 1

▷ Soit $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$.

Exemple 1

▷ Soit $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$. L'inégalité de Plünnecke donne

$$10 \leq |A|, \;\; |3A| \leq 1000.$$

Exemple 1

▷ Soit $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$. L'inégalité de Plünnecke donne

$$10 \leq |A|, \quad |3A| \leq 1000.$$

▷ Notre résultat via Macaulay donne

$$14 \leq |A|, \quad |3A| \leq 500.$$

Exemple 1

▷ Soit $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$. L'inégalité de Plünnecke donne

$$10 \leq |A|, \quad |3A| \leq 1000.$$

▷ Notre résultat via Macaulay donne

$$14 \leq |A|, \quad |3A| \leq 500.$$

▷ En effet,

$$|2A| = 100 = \binom{14}{2} + \binom{9}{1}.$$

Exemple 1

▷ Soit $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$. L'inégalité de Plünnecke donne

$$10 \leq |A|, \quad |3A| \leq 1000.$$

▷ Notre résultat via Macaulay donne

$$14 \leq |A|, \quad |3A| \leq 500.$$

▷ En effet,

$$|2A| = 100 = \binom{14}{2} + \binom{9}{1}.$$

Il suit que

$$|3A| \leq 100^{\langle 2 \rangle} = \binom{15}{3} + \binom{10}{2} = 500.$$

Exemple 1

▷ Soit $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$. L'inégalité de Plünnecke donne

$$10 \leq |A|, \quad |3A| \leq 1000.$$

▷ Notre résultat via Macaulay donne

$$14 \leq |A|, \quad |3A| \leq 500.$$

▷ En effet,

$$|2A| = 100 = \binom{14}{2} + \binom{9}{1}.$$

Il suit que

$$|3A| \leq 100^{\langle 2 \rangle} = \binom{15}{3} + \binom{10}{2} = 500.$$

suite. . .

suite...

▷ Par ailleurs, $|A| \geq 14$.

suite...

▷ Par ailleurs, $|A| \geq 14$. Car si on avait

$$|A| \leq \binom{13}{1},$$

suite...

▷ Par ailleurs, $|A| \geq 14$. Car si on avait

$$|A| \leq \binom{13}{1},$$

Macaulay impliquerait

$$|2A| \leq \binom{14}{2} = 91,$$

contradiction.

suite...

▷ Par ailleurs, $|A| \geq 14$. Car si on avait

$$|A| \leq \binom{13}{1},$$

Macaulay impliquerait

$$|2A| \leq \binom{14}{2} = 91,$$

contradiction.

Bilan

Soit $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$. Alors

$$14 \leq |A|, \ |3A| \leq 500.$$

suite. . .

▷ Par ailleurs, $|A| \geq 14$. Car si on avait

$$|A| \leq \binom{13}{1},$$

Macaulay impliquerait

$$|2A| \leq \binom{14}{2} = 91,$$

contradiction.

Bilan

Soit $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$. Alors

$$14 \leq |A|, \ |3A| \leq 500.$$

Exemple 2

Exemple 2

▷ Soit $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|6A| = 1000$.

Exemple 2

▷ Soit $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|6A| = 1000$. L'inégalité de Plünnecke donne

$$317 \leq |5A|, \quad |7A| \leq 3162.$$

Exemple 2

▷ Soit $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|6A| = 1000$. L'inégalité de Plünnecke donne

$$317 \leq |5A|, \quad |7A| \leq 3162.$$

▷ Notre résultat donne

$$511 \leq |5A|, \quad |7A| \leq 1827.$$

Exemple 2

▷ Soit $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|6A| = 1000$. L'inégalité de Plünnecke donne

$$317 \leq |5A|, \quad |7A| \leq 3162.$$

▷ Notre résultat donne

$$511 \leq |5A|, \quad |7A| \leq 1827.$$

▷ En effet, on a $|7A| \leq 1000^{\langle 6 \rangle} = 1827$.

Exemple 2

▷ Soit $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|6A| = 1000$. L'inégalité de Plünnecke donne

$$317 \leq |5A|, \quad |7A| \leq 3162.$$

▷ Notre résultat donne

$$511 \leq |5A|, \quad |7A| \leq 1827.$$

▷ En effet, on a $|7A| \leq 1000^{\langle 6 \rangle} = 1827$.

▷ Une borne $|5A| \leq 510$ entraînerait $|6A| \leq 510^{\langle 5 \rangle} = 999$, contradiction.

Exemple 2

▷ Soit $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|6A| = 1000$. L'inégalité de Plünnecke donne

$$317 \leq |5A|, \quad |7A| \leq 3162.$$

▷ Notre résultat donne

$$511 \leq |5A|, \quad |7A| \leq 1827.$$

▷ En effet, on a $|7A| \leq 1000^{\langle 6 \rangle} = 1827$.

▷ Une borne $|5A| \leq 510$ entraînerait $|6A| \leq 510^{\langle 5 \rangle} = 999$, contradiction.

Comparaison étendue

Comparaison étendue

Pour tout $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$:

Comparaison étendue

Pour tout $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$:

	Macaulay	Plünnecke
$\|A\| \geq$	14	10
$\|3A\| \leq$	500	1.000
$\|4A\| \leq$	1.985	10.000
$\|5A\| \leq$	6.683	100.000
$\|6A\| \leq$	19.851	1.000.000
$\|7A\| \leq$	53.391	10.000.000
$\|8A\| \leq$	132.405	100.000.000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Comparaison étendue

Pour tout $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$:

	Macaulay	Plünnecke
$\|A\| \geq$	14	10
$\|3A\| \leq$	500	1.000
$\|4A\| \leq$	1.985	10.000
$\|5A\| \leq$	6.683	100.000
$\|6A\| \leq$	19.851	1.000.000
$\|7A\| \leq$	53.391	10.000.000
$\|8A\| \leq$	132.405	100.000.000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Optimalité ?

Optimalité ?

Question

Optimalité ?

Question

Pour $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$, nos nouvelles bornes

$$14 \leq |A|, \quad |3A| \leq 500$$

sont-elles optimales ?

Optimalité ?

Question

Pour $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$, nos nouvelles bornes

$$14 \leq |A|, \quad |3A| \leq 500$$

sont-elles optimales ?

Réponse

Optimalité ?

Question

Pour $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$, nos nouvelles bornes

$$14 \leq |A|, \quad |3A| \leq 500$$

sont-elles optimales ?

Réponse

Presque !

Optimalité ?

Question

Pour $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$, nos nouvelles bornes

$$14 \leq |A|, \quad |3A| \leq 500$$

sont-elles optimales ?

Réponse

Presque ! En effet, soit

$$A = \{0, 1, 49, 118, 267, 441, 641, 852, 1081, 1347, 1721, 2117, 2565, 3073\}$$

Optimalité ?

Question

Pour $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$, nos nouvelles bornes

$$14 \leq |A|, \quad |3A| \leq 500$$

sont-elles optimales ?

Réponse

Presque ! En effet, soit

$$A = \{0, 1, 49, 118, 267, 441, 641, 852, 1081, 1347, 1721, 2117, 2565, 3073\}$$

Alors $|2A| = 100$ comme requis, et $14 = |A|$, $|3A| = 495$.

Optimalité ?

Question

Pour $A \subset \mathbb{Z}$ tel que $|2A| = 100$, nos nouvelles bornes

$$14 \leq |A|, \quad |3A| \leq 500$$

sont-elles optimales ?

Réponse

Presque ! En effet, soit

$$A = \{0, 1, 49, 118, 267, 441, 641, 852, 1081, 1347, 1721, 2117, 2565, 3073\}$$

Alors $|2A| = 100$ comme requis, et $14 = |A|$, $|3A| = 495$.

De même, dans le cas $|6A| = 1000$ de l'exemple 2, notre avions

$$511 \leq |5A|, \quad |7A| \leq 1827$$

De même, dans le cas $|6A| = 1000$ de l'exemple 2, notre avions

$$511 \leq |5A|, \quad |7A| \leq 1827$$

Là encore, ces bornes sont presque optimales :

De même, dans le cas $|6A| = 1000$ de l'exemple 2, notre avions

$$511 \leq |5A|, \quad |7A| \leq 1827$$

Là encore, ces bornes sont presque optimales :

Exemple

De même, dans le cas $|6A| = 1000$ de l'exemple 2, notre avions

$$511 \leq |5A|, \quad |7A| \leq 1827$$

Là encore, ces bornes sont presque optimales :

Exemple

Soit

$$A = \{0, 1, 2, 4, 13, 255, 732, 1310\}.$$

De même, dans le cas $|6A| = 1000$ de l'exemple 2, notre avions

$$511 \leq |5A|, \quad |7A| \leq 1827$$

Là encore, ces bornes sont presque optimales :

Exemple

Soit

$$A = \{0, 1, 2, 4, 13, 255, 732, 1310\}.$$

Alors $|6A| = 1000$ comme requis, et on a

$$538 = |5A|, \ |7A| = 1692.$$

De même, dans le cas $|6A| = 1000$ de l'exemple 2, notre avions

$$511 \leq |5A|, \quad |7A| \leq 1827$$

Là encore, ces bornes sont presque optimales :

Exemple

Soit

$$A = \{0, 1, 2, 4, 13, 255, 732, 1310\}.$$

Alors $|6A| = 1000$ comme requis, et on a

$$538 = |5A|, \ |7A| = 1692.$$

Bornes optimales

Bornes optimales

Notation

Soit $(G, +)$ un groupe abélien. Soient $m, h, k \geq 1$ des entiers tels que $m \leq |G|$.

Bornes optimales

Notation

Soit $(G,+)$ un groupe abélien. Soient $m,h,k \geq 1$ des entiers tels que $m \leq |G|$. Posons

$$\omega_G(m,h,k) = \begin{cases} \min_{A\subseteq G}|kA| & \text{pour } k<h \\ \max_{A\subseteq G}|kA| & \text{pour } k>h \end{cases}$$

où A parcourt tous les sous-ensembles de G tels que $|hA| = m$.

Bornes optimales

Notation

Soit $(G,+)$ un groupe abélien. Soient $m,h,k \geq 1$ des entiers tels que $m \leq |G|$. Posons

$$\omega_G(m,h,k) = \begin{cases} \min_{A \subseteq G} |kA| & \text{pour } k < h \\ \max_{A \subseteq G} |kA| & \text{pour } k > h \end{cases}$$

où A parcourt tous les sous-ensembles de G tels que $|hA| = m$.

Par définition, pour tout $A \subseteq G$ tel que $|hA| = m$, on a

$$\omega_G(m,h,h-1) \leq |(h-1)A|, \ |(h+1)A| \leq \omega_G(m,h,h+1),$$

et ces bornes sont atteintes.

Bornes optimales

Notation

Soit $(G,+)$ un groupe abélien. Soient $m,h,k \geq 1$ des entiers tels que $m \leq |G|$. Posons

$$\omega_G(m,h,k) = \begin{cases} \min_{A\subseteq G}|kA| & \text{pour } k<h \\ \max_{A\subseteq G}|kA| & \text{pour } k>h \end{cases}$$

où A parcourt tous les sous-ensembles de G tels que $|hA| = m$.

Par définition, pour tout $A \subseteq G$ tel que $|hA| = m$, on a

$$\omega_G(m,h,h-1) \leq |(h-1)A|, \ |(h+1)A| \leq \omega_G(m,h,h+1),$$

et ces bornes sont atteintes.

Pour $k = h + 1$

Pour $k = h+1$

- Plünnecke : $\omega_G(m, h, h+1) \leq m^{(h+1)/h}$

Pour $k = h + 1$

- Plünnecke : $\omega_G(m, h, h+1) \leq m^{(h+1)/h}$
- Notre résultat : $\omega_G(m, h, h+1) \leq m^{\langle h \rangle}$

Pour $k = h+1$

- Plünnecke : $\omega_G(m,h,h+1) \leq m^{(h+1)/h}$
- Notre résultat : $\omega_G(m,h,h+1) \leq m^{\langle h \rangle}$

Exemple revisité

Pour $k = h + 1$

- Plünnecke : $\omega_G(m, h, h+1) \leq m^{(h+1)/h}$
- Notre résultat : $\omega_G(m, h, h+1) \leq m^{\langle h \rangle}$

Exemple revisité

Quelle est la valeur de $\omega_{\mathbb{Z}}(100, 2, 3)$?

Pour $k = h + 1$

- Plünnecke : $\omega_G(m, h, h+1) \leq m^{(h+1)/h}$
- Notre résultat : $\omega_G(m, h, h+1) \leq m^{\langle h \rangle}$

Exemple revisité

Quelle est la valeur de $\omega_{\mathbb{Z}}(100, 2, 3)$?

- Plünnecke : $\omega_{\mathbb{Z}}(100, 2, 3) \leq 1000$

Pour $k = h + 1$

- Plünnecke : $\omega_G(m,h,h+1) \leq m^{(h+1)/h}$
- Notre résultat : $\omega_G(m,h,h+1) \leq m^{\langle h \rangle}$

Exemple revisité

Quelle est la valeur de $\omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3)$?

- Plünnecke : $\omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3) \leq 1000$
- Notre résultat : $\omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3) \leq 500$

Pour $k = h+1$

- Plünnecke : $\omega_G(m,h,h+1) \leq m^{(h+1)/h}$
- Notre résultat : $\omega_G(m,h,h+1) \leq m^{\langle h \rangle}$

Exemple revisité

Quelle est la valeur de $\omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3)$?

- Plünnecke : $\omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3) \leq 1000$
- Notre résultat : $\omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3) \leq 500$
- Un exemple donne : $\omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3) \geq 495$

Pour $k = h + 1$

- Plünnecke : $\omega_G(m, h, h+1) \leq m^{(h+1)/h}$
- Notre résultat : $\omega_G(m, h, h+1) \leq m^{\langle h \rangle}$

Exemple revisité

Quelle est la valeur de $\omega_{\mathbb{Z}}(100, 2, 3)$?

- Plünnecke : $\omega_{\mathbb{Z}}(100, 2, 3) \leq 1000$
- Notre résultat : $\omega_{\mathbb{Z}}(100, 2, 3) \leq 500$
- Un exemple donne : $\omega_{\mathbb{Z}}(100, 2, 3) \geq 495$
- Donc $495 \leq \omega_{\mathbb{Z}}(100, 2, 3) \leq 500$

Pour $k = h+1$

- Plünnecke : $\omega_G(m,h,h+1) \leq m^{(h+1)/h}$
- Notre résultat : $\omega_G(m,h,h+1) \leq m^{\langle h \rangle}$

Exemple revisité

Quelle est la valeur de $\omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3)$?

- Plünnecke : $\omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3) \leq 1000$
- Notre résultat : $\omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3) \leq 500$
- Un exemple donne : $\omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3) \geq 495$
- Donc $495 \leq \omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3) \leq 500$

Problème ouvert (probablement pour longtemps)

Pour $k = h+1$

- Plünnecke : $\omega_G(m,h,h+1) \leq m^{(h+1)/h}$
- Notre résultat : $\omega_G(m,h,h+1) \leq m^{\langle h \rangle}$

Exemple revisité

Quelle est la valeur de $\omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3)$?

- Plünnecke : $\omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3) \leq 1000$
- Notre résultat : $\omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3) \leq 500$
- Un exemple donne : $\omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3) \geq 495$
- Donc $495 \leq \omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3) \leq 500$

Problème ouvert (probablement pour longtemps)

Déterminer $\omega_{\mathbb{Z}}(m,h,h\pm 1)$ pour tout $m,h \geq 1$.

Pour $k = h+1$

- Plünnecke : $\omega_G(m,h,h+1) \leq m^{(h+1)/h}$
- Notre résultat : $\omega_G(m,h,h+1) \leq m^{\langle h \rangle}$

Exemple revisité

Quelle est la valeur de $\omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3)$?

- Plünnecke : $\omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3) \leq 1000$
- Notre résultat : $\omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3) \leq 500$
- Un exemple donne : $\omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3) \geq 495$
- Donc $495 \leq \omega_{\mathbb{Z}}(100,2,3) \leq 500$

Problème ouvert (probablement pour longtemps)

Déterminer $\omega_{\mathbb{Z}}(m,h,h\pm 1)$ pour tout $m,h \geq 1$.

Merci pour votre attention.