

En route vers les théorèmes de Gödel

Pierre CATOIRE

Jeudi 14 Décembre 2023

Dans ce séminaire, le but est d'amener les auditeurs à mieux comprendre les célèbres théorèmes de Gödel.

Il est regrettable qu'un cours de logique ne soit pas imposé à un moment dans le cursus universitaire pour mieux comprendre ce que disent ces fameux théorèmes. Ma curiosité m'a donc conduit à travailler la logique pour mieux comprendre ces théorèmes au travers de livres. Vous aurez deviné que je ne suis pas spécialiste de ce domaine des mathématiques. Par conséquent, je ne vous assommerai pas de démonstrations. Mon but est de vous faire comprendre ce que ces derniers signifient avec suffisamment de détails pour qu'il ne soit plus si obscurs/mal compris de tous. Pour cela, nous allons aborder plusieurs thèmes de logique du premier ordre. Dans le but de gagner du temps, je m'appuierai sur la compréhension intuitive de l'auditoire du calcul des prédicats. Cette présentation se déroulera en quatre temps :

1. Dans une première partie, je fais une rapide introduction à la théorie des langages, des prédicats du premier ordre et des modèles ;
2. Nous ferons une petite aparté sur ce qu'est une démonstration formelle ;
3. Puis, nous parlerons des machines de Turing qui sont un outils fondamental pour étudier les problèmes de décidabilité. Nous verrons bien entendu le fameux résultat comme quoi une machine de Turing ne peut prédire son propre arrêt ;
4. Enfin, nous introduirons les axiomes de Péano et discuterons les théorèmes de complétudes et d'incomplétudes de Gödel.

Le temps viendra peut-être à manquer. Par conséquent, il n'est pas exclu que ce séminaire se scinde en deux parties en fonction du point que nous aurons atteint au bout de la première présentation.

Je tiens à remercier Nicolas CHENAVIER pour m'avoir conseillé les excellents livres de René CORI et Daniel LASCAR, il y a quatre ans de cela.